Dérivation, continuité et convexité

▶ Exercice n°1

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 2}{2}$

3) $f(x) = \dfrac{3}{x+2}$

4) $f(x) = \dfrac{2x-1}{-x+6}$

7) $f(x) = \dfrac{x-1}{x^2+2}$

8) $f(x) = (x+3)\sqrt{x}$

9) $f(x) = (3x-1)^2$

10) $f(x) = \sqrt{4x+8}$

11) $f(x) = \left(\dfrac{1}{2}x + 4\right)^3$

▶ Exercice n°2

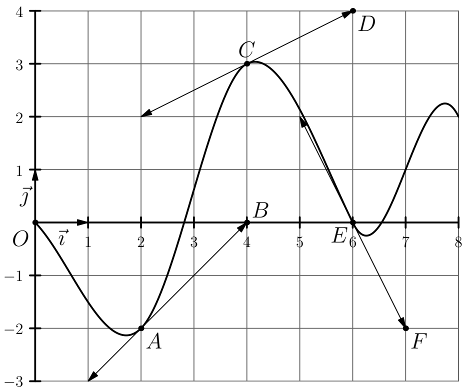
Déterminer une équation de la tangente T à la courbe de f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = -x^2 + 6x - 8 \quad a = -1$

2) $f(x) = \dfrac{2x+1}{x-3} \quad a = 4$

▶ Exercice n°3

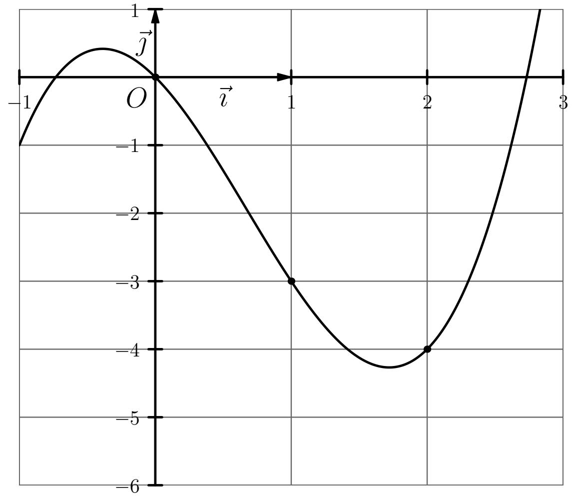
Dans la figure ci-dessous est représentée la courbe d'une fonction f dérivable sur $[0\,;\,8]$.



1. La tangente au point A d'abscisse 2 passe par le point B. En déduire $f'(2)$.
2. La tangente au point C d'abscisse 4 passe par le point D. En déduire $f'(4)$.
3. La tangente au point E d'abscisse 6 passe par le point F. En déduire $f'(6)$.

▶ Exercice n°4

Soit f la fonction définie sur $[-1{,}3]$ par $f(x) = x^3 - 2x^2 - 2x$ dont la courbe est donnée ci-dessous. Construire sur le graphique les tangentes à la courbe aux points d'abscisses 0, 1 et 2.



▶ Exercice n°5

Soit f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x}$.

Déterminer les points de la courbe représentative de f (dans un repère orthonormal) où la tangente :

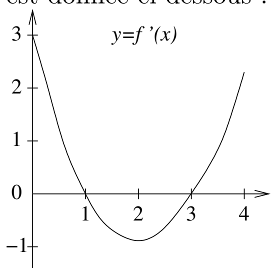
a) est horizontale.

b) admet -2 comme coefficient directeur.

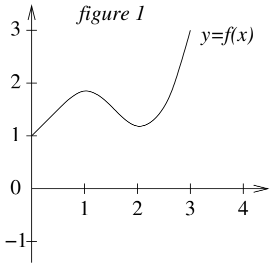
c) est parallèle à la droite d'équation $y = -\frac{2}{3}x - 5$.

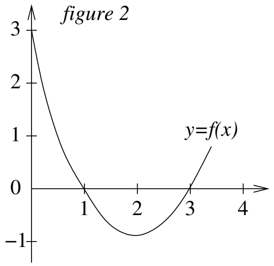
▶ Exercice n°6

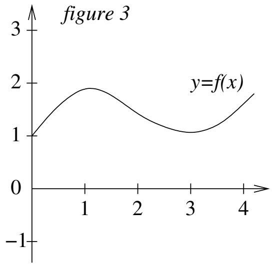
Soit f une fonction dérivable sur $[0\,;\,4]$. La courbe représentative de **sa dérivée** est donnée ci-dessous :



Parmi les trois figures ci-dessous, laquelle peut représenter la fonction f ?
(justifier sa réponse)







▶ Exercice n°7

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-1}{x^2+1}$.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à la courbe C_f.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°8

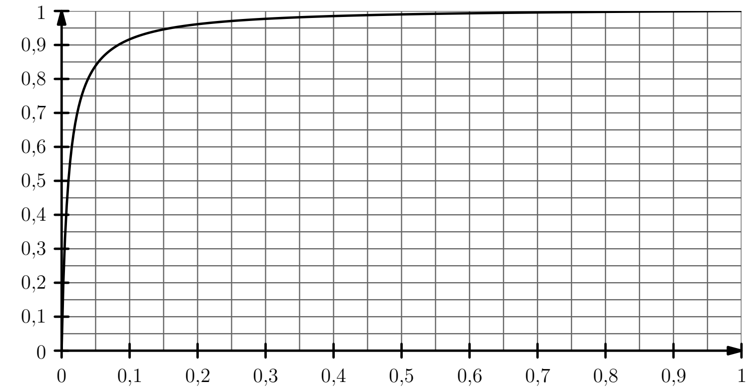
Soit f la fonction définie sur $\left]\frac{1}{2}\,;+\infty\right[$ par $f(x) = \dfrac{2x^2-x+2}{2x-1}$.

1. Déterminer les limites de f en $\frac{1}{2}$ et en $+\infty$. En déduire les asymptotes à la courbe C_f.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.

▶ Exercice n°9

Dans une population donnée, on note x la proportion de personnes atteintes de la grippe (on a donc $x \in [0\,;1[$).
Un fabricant propose un test de dépistage et affirme qu'avec son test la probabilité d'avoir la grippe lorsque le test est positif est donnée par la fonction f définie sur $[0\,;1[$ par $f(x) = \dfrac{99x}{98x+1}$ où x est la proportion de personnes atteintes de la grippe.

1. L'affirmation suivante est-elle vraie ?
   « Si 1 % de la population est malade, un individu ayant un test positif n'a qu'une chance sur deux d'avoir la grippe. »
2. Dériver f et justifier que f est strictement croissante sur $[0\,;1[$.
3. À partir de quelle proportion x de malades dans la population, la probabilité d'avoir la grippe en étant positif au test dépasse-t-elle 90% ?
4. La courbe de la fonction f est donnée ci-dessous :

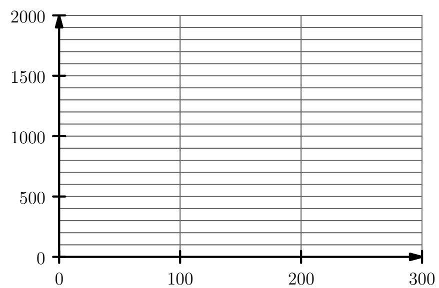


   a) Tracer la tangente à la courbe au point d'abscisse 0,05.
   b) La tangente à la courbe de f au point d'abscisse 1 est-elle horizontale ?

▶ Exercice n°10

Un loueur de camions propose le tarif suivant qui dépend du nombre de kilomètres effectué pendant le trajet que souhaite effectuer le client :
• 10 euros par km pour les 100 premiers kilomètres *(tarif de base)*
• réduction de 50% sur le tarif de base pour la partie du trajet dépassant les 100 km

1. Expliquer pourquoi le prix à payer pour un trajet de 200 km est de 1500 euros.
2. On note $f(x)$ le prix à payer en euros pour parcourir un trajet de x km. Exprimer $f(x)$ en fonction de x dans les cas suivants :
   - Si $0 \leqslant x \leqslant 100$ alors $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
   - Si $100 < x$ alors $f(x) = \ldots\ldots\ldots\ldots$
3. Tracer la courbe représentative de f dans le repère ci-dessous :



   La fonction f est-elle continue sur $[0;+\infty[$?

▶ Exercice n°11

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^3 + 9x^2 - 24x + 12$ et C_f sa courbe représentative dans un repère orthogonal.

1. Déterminer les limites de f en $-\infty$ et en $+\infty$.
2. Étudier les variations de f sur $\mathbb{R}$.
3. Montrer que la courbe C_f admet deux points où la tangente admet un coefficient directeur égal à -9.
4. a) Justifier, à l'aide d'un théorème du cours, que l'équation $f(x) = 0$ admet une unique x_0 dans l'intervalle $[0\,;\,1]$.
   b) Déterminer une valeur approchée de x_0 à 0,1 près par défaut.
5. a) Déterminer la dérivée seconde de f.
   b) Déterminer les intervalles où la fonction f est concave et convexe.
   c) Justifier que la courbe C_f admet un point d'inflexion I dont on précisera les coordonnées.
   d) Déterminer une équation de la tangente à C_f au point I.

▶ Exercice n°12

Soit C la fonction définie sur $[0; 10]$ par $C(x) = x^3 - 12x^2 + 72x + 100$.

1. Déterminer la dérivée seconde de C. En déduire les intervalles où la fonction C est concave et convexe.
2. La fonction C représente en fait le « coût total » de production, en milliers d'euros, de x milliers d'objets produits dans une certaine usine. Comme cela se pratique couramment en économie, on assimile le « coût marginal » à la dérivée de la fonction « coût total » C.
   Recopier et compléter les phrases suivantes par les termes « croissante » ou « décroissante » :
   - Quand la fonction « coût total » C est convexe sur un intervalle alors la fonction « coût marginal » C' est .... sur cet intervalle.
   - Quand la fonction « coût total » C est concave sur un intervalle alors la fonction « coût marginal » C' est .... sur cet intervalle.