

Lois de probabilités continues

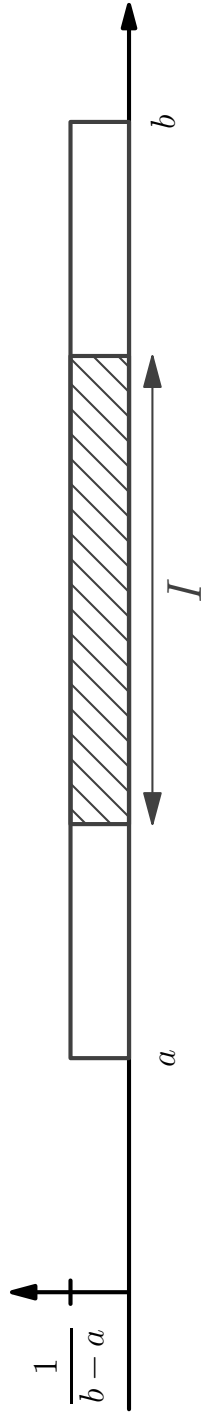
©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

<https://www.xm1math.net>

1. Loi uniforme

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur un intervalle $[a; b]$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[a; b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\frac{1}{b-a}$.



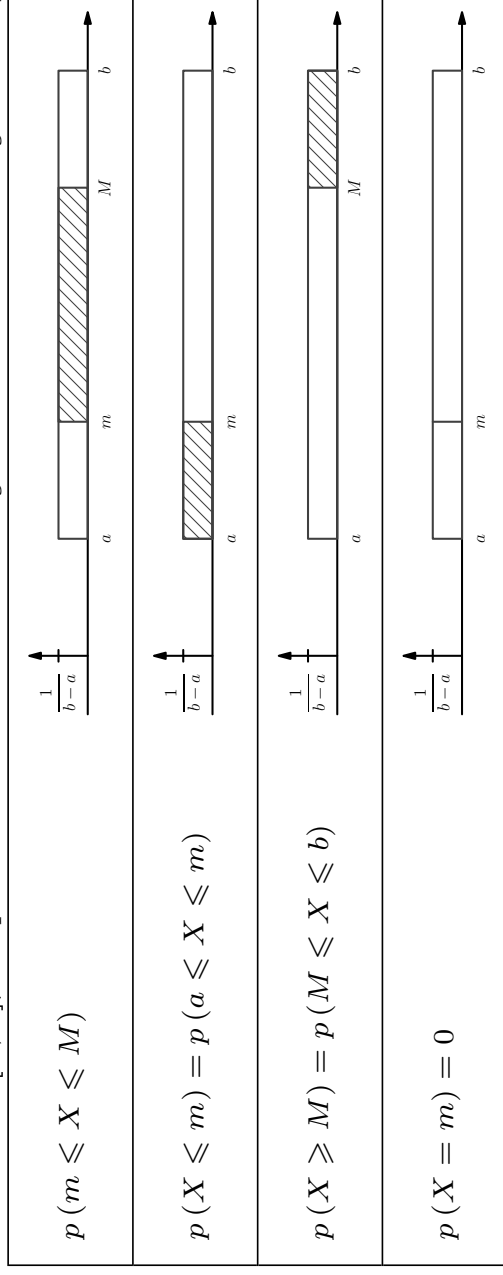
Remarque(s)

- Cette loi est notamment utilisée quand l'expérience aléatoire consiste à choisir au hasard un nombre réel X dans un intervalle $[a; b]$ (avec donc une infinité de possibilités).
- L'aire du rectangle de hauteur $\frac{1}{b-a}$ et allant de a à b en abscisse est égale à 1.
- On est « obligé » de considérer que la probabilité que X soit égale à un nombre précis dans l'intervalle $[a; b]$ est nulle, même si c'est contraire à l'intuition, afin d'éviter toute contradiction avec le fait qu'il y ait une infinité de possibilités.

1. Loi uniforme

Propriété(s)

• Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ alors pour tous réels m et M inclus dans $[a; b]$, les probabilités suivantes sont égales à l'aire du rectangle correspondant :



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la loi uniforme sur $[a; b]$ alors :
 l'espérance de X est égale à $\frac{a+b}{2}$; la variance est égale à $\frac{(b-a)^2}{12}$.

1. Loi uniforme

Exemple(s)

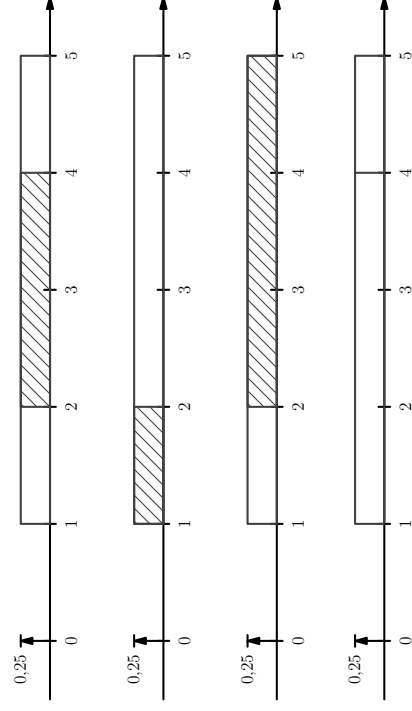
On considère l'expérience aléatoire consistant à choisir un réel X au hasard dans l'intervalle $[1; 5]$ (X suit alors la loi uniforme sur $[1; 5]$)
 Le premier réflexe à avoir est de raisonner avec un rectangle allant de 1 à 5 en abscisse et de hauteur égale à $\frac{1}{5-1} = \frac{1}{4} = 0,25$ (afin que son aire totale soit égale à 1). Pour calculer ensuite les probabilités il suffit de regarder l'aire de la zone dans le rectangle qui correspond à l'événement.

• $p(2 \leq X \leq 4) = 2 \times 0,25 = 0,5$

• $p(X \leq 2) = p(1 \leq X \leq 2) = 1 \times 0,25 = 0,25$

• $p(X \geq 2) = p(2 \leq X \leq 5) = 3 \times 0,25 = 0,75$

• $p(X = 4) = 0$

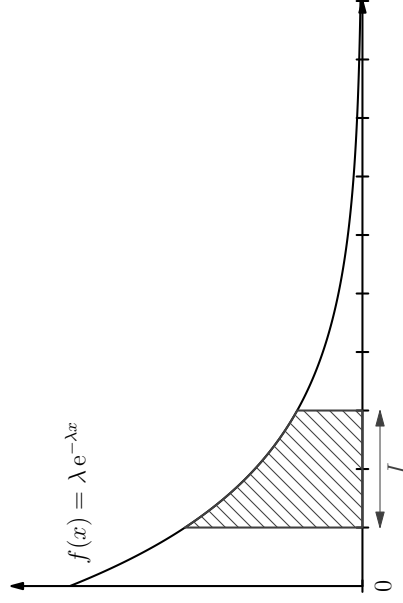


La valeur moyenne que prend X si l'on répète un grand nombre de fois cette expérience aléatoire est égale à l'espérance de X qui vaut $\frac{1+5}{2} = 3$ (ce qui correspond au milieu de l'intervalle).

2. Loi exponentielle

Définition

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[0; +\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



Remarque(s)

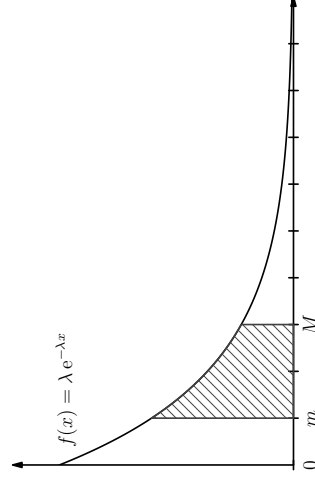
L'aire totale sous la courbe de 0 à $+\infty$ est égale à 1 unité d'aire et on dit que f est une densité de probabilité.

2. Loi exponentielle

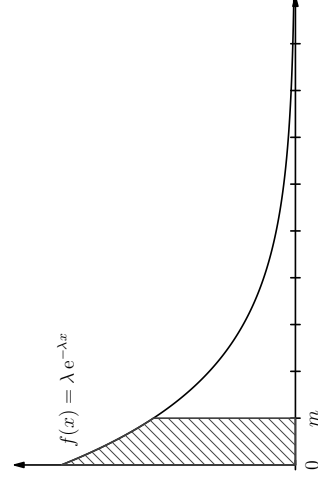
Propriété(s)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ alors pour tous réels m et M inclus dans $[0; +\infty[$, on a :

$$\begin{aligned} \cdot \quad p(m \leq X \leq M) &= \int_m^M \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_m^M \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \cdot \quad p(X \leq m) = p(0 \leq X \leq m) &= \int_0^m \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^m \end{aligned}$$



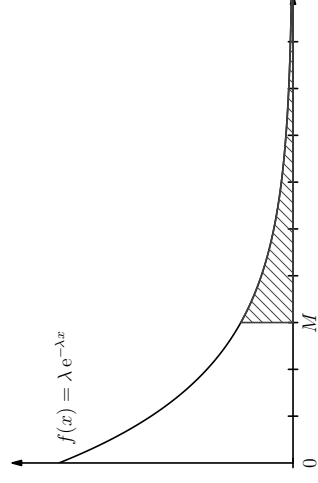
2. Loi exponentielle

Propriété(s)

$$\begin{aligned} \cdot p(X \geq M) &= 1 - p(0 \leq X \leq M) = 1 - \int_0^M \lambda e^{-\lambda x} dx \\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^M \end{aligned}$$

(on passe par l'événement contraire car on ne se sait pas calculer directement en terminale une intégrale de borne $+\infty$)

- Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ alors l'**espérance** de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.



Remarque(s)

On a les mêmes résultats avec des inégalités strictes.

2. Loi exponentielle

Exemple(s)

1. La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0; +\infty[$.

• Calcul de $p(X < 100)$:

$$\begin{aligned} p(X < 100) &= p(0 < X < 100) = \int_0^{100} 0,0006 e^{-0,0006x} dx \\ &= \left[-e^{-0,0006x} \right]_0^{100} = -e^{-0,06} + 1 \approx 0,0582 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \cdot \text{Calcul de } p(X \geq 400) : p(X \geq 400) &= 1 - p(0 \leq X \leq 400) \\ &= 1 - \int_0^{400} 0,0006 e^{-0,0006x} dx = 1 - \left[-e^{-0,0006x} \right]_0^{400} = 1 - \left(-e^{-0,24} + 1 \right) = e^{-0,24} \approx 0,7866 \end{aligned}$$

2. Une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ sur $[0; +\infty[$. Détermination de la valeur de λ sachant que $p(X < 70) = 0,05$:

$$\begin{aligned} p(X < 70) = 0,05 &\Leftrightarrow \int_0^{70} \lambda e^{-\lambda x} dx = 0,05 \Leftrightarrow \left[-e^{-\lambda x} \right]_0^{70} = 0,05 \\ \Leftrightarrow -e^{-70\lambda} + 1 = 0,05 &\Leftrightarrow e^{-70\lambda} = 0,95 \Leftrightarrow -70\lambda = \ln(0,95) \Leftrightarrow \lambda = \frac{\ln(0,95)}{-70} \end{aligned}$$

Remarque(s)

La loi exponentielle est dite « loi sans mémoire » car on peut montrer que si X suit une loi exponentielle alors, pour tous réels positifs M et h , la probabilité que X soit supérieur à $M + h$ sachant que X est supérieur à M est la même que la probabilité que X soit supérieur à h .

3. Généralités sur les lois continues à densité

Étant donné f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I telle que :

$$I = [a, b] \text{ alors } \int_a^b f(t) dt = 1 \text{ et si } I = [a, +\infty[\text{ alors } \lim_{x \rightarrow +\infty} \int_a^x f(t) dt = 1$$

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de probabilité continue de densité f sur I** si pour tout intervalle inclus dans I la probabilité que X appartienne à cet intervalle est égale à l'aire « sous la courbe de la densité f » correspondante.

On appelle alors fonction de répartition de X la fonction F définie sur \mathbb{R} par $F(x) = p(X \leq x)$.

Remarque(s)

La fonction de densité de la loi uniforme sur $[a; b]$ est définie sur $[a; b]$ par $f(x) = \frac{1}{b-a}$.
La fonction de densité de la loi exponentielle de paramètre λ est définie sur $[0; +\infty[$ par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$.

Fin du chapitre