Limites de fonctions

©Pascal Brachet (CC BY NC SA)

https://www.xm1math.net

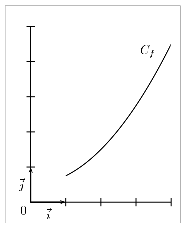
1. Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

a) Limite infinie en $+\infty$ ou en $-\infty$

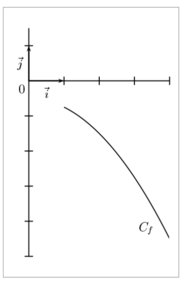
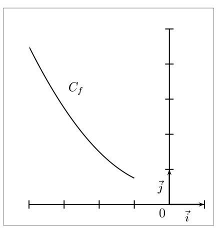
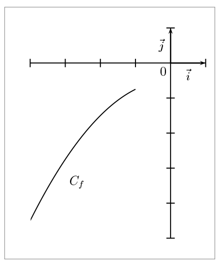
Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle admettant $+\infty$ pour borne.
On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$) si on peut toujours trouver un x assez grand à partir duquel $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut.

On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$



De la même façon, on définit :

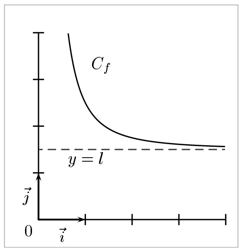
 $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = -\infty$	 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$	 $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

1. Limite d'une fonction en $+\infty$ ou en $-\infty$

b) Limite finie en $+\infty$ ou en $-\infty$

Définition

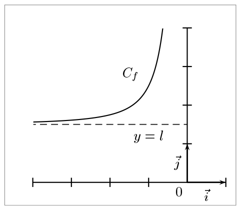
Soit f une fonction définie sur un intervalle admettant $+\infty$ pour borne.
- On dit que f a pour limite le nombre l en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$) si on peut toujours trouver un x assez grand à partir duquel $f(x)$ soit aussi proche de l que l'on veut.
On écrit alors que $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = l$



- Graphiquement, quand x tend vers $+\infty$, la courbe de f se rapproche autant que l'on veut de la droite horizontale d'équation $y = l$. On dit alors que cette droite est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $+\infty$

Et quand x tend vers $-\infty$

- On définit de la même façon $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = l$



- Graphiquement, quand x tend vers $-\infty$, la courbe de f se rapproche autant que l'on veut de la droite horizontale d'équation $y = l$. On dit alors que cette droite est une **asymptote horizontale** à la courbe de f en $-\infty$.

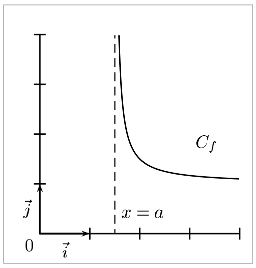
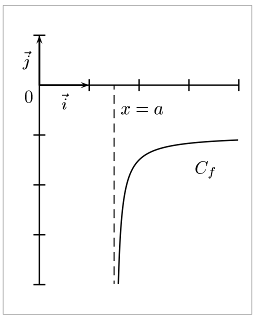
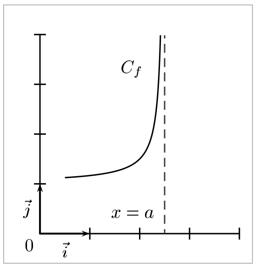
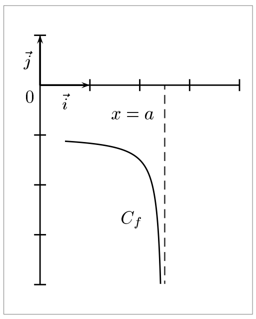
Dire que $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = l$ équivaut à dire que la droite d'équation $y = l$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

2. Limite d'une fonction en un réel a

a) Limite infinie en a - Asymptote verticale

Définition

- Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a\,;\,b[$ ou $]c\,;\,a[$. On a les situations suivantes :

sur $]a\,,\,b[$	sur $]a\,,\,b[$	sur $]c\,,\,a[$	sur $]c\,,\,a[$
			
$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a}} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to a\\x<a}} f(x) = -\infty$

- Graphiquement, quand x tend vers a, la courbe de f se rapproche autant que l'on veut de la droite verticale d'équation $x = a$. On dit alors que cette droite est une **asymptote verticale** à la courbe de f en a.

Dire que $\lim\limits_{\substack{x\to a\\x>a \text{ ou } x<a}} f(x) = \pm\infty$ équivaut à dire que la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f en $\pm\infty$.

2. Limite d'une fonction en un réel a

b) Limite finie en a

Propriété(s)

Si f est une fonction polynôme (c'est à dire de la forme $f(x) = ax + b$ ou $ax^2 + bx + c$ ou $ax^3 + bx^2 + cx + d, \cdots$), une fonction rationnelle (c'est à dire le quotient de deux polynômes) ou la fonction racine carrée et si f est définie en a alors on a $\lim\limits_{\substack{x \to a \\ x>a \text{ ou } x<a}} f(x) = f(a)$. *(la limite en a est égale à la valeur de la fonction en a)*

Exemple(s)

- $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} x^2 + 1 = 0^2 + 1 = 1$
- $\lim\limits_{\substack{x \to 4 \\ x<4}} \sqrt{x} = \sqrt{4} = 2$

3. Détermination des limites

a) Limite des fonctions de référence

Propriété(s)

- *En $+\infty$:*

$\lim\limits_{x \to +\infty} x = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{x} = +\infty$

$\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{x^3} = 0$; $\lim\limits_{x \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$

- *En $-\infty$:*

$\lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^2 = +\infty$; $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3 = -\infty$

$\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^2} = 0$; $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$

- *En 0 :*

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{x^3} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x>0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty$

$\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x} = -\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^2} = +\infty$; $\lim\limits_{\substack{x \to 0 \\ x<0}} \frac{1}{x^3} = -\infty$

3. Détermination des limites

b) Opérations sur les limites

On note **FI** (pour forme indéterminée) les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure. l et l' représentent deux nombres finis.

Limite d'une somme

Situation	Exemple
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l+l'$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{3}_{\to 3} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} = 3$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{4}_{\to 4} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{x}_{\to -\infty} = -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} + \underbrace{\sqrt{x}}_{\to +\infty} = +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x^3}_{\to -\infty} + \underbrace{x}_{\to -\infty} = -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty}+\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$	**FI**

3. Détermination des limites

Exemples de recherche de la limite d'une différence

$$\lim_{x\to+\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} - \underbrace{5}_{\to 5} = -5 \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\to\sqrt{0}} - \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = -\infty$$

$$\lim_{x\to-\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to -\infty} = +\infty \qquad \lim_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to +\infty} - \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to -\infty} = +\infty$$

Limite d'un produit

Situation	Exemple
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l\times l'$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{4}_{\to 4} \times \underbrace{\left[3+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}\right]}_{\to 3} = 12$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0}\times\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{\left(x^2+3\right)}_{\to 0^2+3=3} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to +\infty} = +\infty$

3. Détermination des limites

Situation	Exemple
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} -1\right]}_{\to -1} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} = -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x<0}} \underbrace{(4+x)}_{\to 4+0=4} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to-\infty} = -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{\left[\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} -5\right]}_{\to -5} \times \underbrace{x^3}_{\to-\infty} = +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{x^2}_{\to+\infty} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} = +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \underbrace{x^3}_{\to-\infty} \times \underbrace{\left(7-x^2\right)}_{\to-\infty} = +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \underbrace{(8-x)}_{\to-\infty} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\to+\infty} = -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$	**FI**

3. Détermination des limites

Limite de l'inverse

Situation	Exemple
$\left(\frac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \frac{1}{\underbrace{\left(\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} +2\right)}_{\to 2}} = \frac{1}{2}$
$\left(\frac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} \frac{1}{\underbrace{(x+2)}_{\to-\infty}} = 0$
$\left(\frac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x>1}} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^+}} = +\infty$
$\left(\frac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$	$\lim\limits_{\substack{x\to 1\\ x<1}} \frac{1}{\underbrace{(x-1)}_{\to 0^-}} = -\infty$

3. Détermination des limites

Limite d'un quotient

Pour étudier la limite de $\dfrac{f}{g}$, on écrit que $\dfrac{f}{g} = f \times \dfrac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\dfrac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\dfrac{f}{g}$.

Exemples :

- $\lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} \dfrac{-5}{x-2} = \lim\limits_{\substack{x\to 2\\ x<2}} (-5) \times \underbrace{\left[\dfrac{1}{\underbrace{(x-2)}_{\to 0^-}}\right]}_{\to -\infty} = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{x+1}{\sqrt{x}} = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \underbrace{(x+1)}_{\to 1} \times \underbrace{\left[\dfrac{1}{\underbrace{(\sqrt{x})}_{\to 0^+}}\right]}_{\to +\infty} = +\infty$

- $\lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \dfrac{x^2+3}{x+1} = \lim\limits_{\substack{x\to -1\\ x>-1}} \underbrace{(x^2+3)}_{\to 4} \times \underbrace{\left[\dfrac{1}{\underbrace{(x+1)}_{\to 0^+}}\right]}_{\to +\infty} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x^3}{1+\frac{1}{x}} = \lim\limits_{x\to -\infty} \underbrace{(2x^3)}_{\to -\infty} \times \underbrace{\left[\dfrac{1}{\underbrace{\left(1+\underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0}\right)}_{\to 1}}\right]}_{\to 1} = -\infty$

3. Détermination des limites

c) Cas des fonctions polynômes en $+\infty$ et en $-\infty$

Exemples introductifs

- $\lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{\underbrace{x^2}_{\to +\infty} - \underbrace{x}_{\to +\infty}}_{FI} + 1 = \lim\limits_{x\to +\infty} \underbrace{x^2}_{\to +\infty} \underbrace{\left[1 - 2\times \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{x^2}\right)}_{\to 0}\right]}_{\to 1} = +\infty$

- $\lim\limits_{x\to -\infty} \underbrace{\underbrace{2x^3}_{\to -\infty} + \underbrace{4x^2}_{\to +\infty}}_{FI} + 8 = \lim\limits_{x\to -\infty} 2x^3 \underbrace{\left[1 + 2\times \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\to 0} + 8\times \underbrace{\left(\frac{1}{x^3}\right)}_{\to 0}\right]}_{\to 1} = -\infty$

En cherchant la limite en $\pm\infty$ de polynômes, on tombe souvent sur des formes indéterminées mais on remarque qu'en factorisant par le terme de plus haut degré, le terme dans le crochet tend toujours vers 1.

Propriété(s)

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, un polynôme admet la même limite que son terme de plus haut degré.

3. Détermination des limites

Exemple(s)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2+7x+4 = \lim\limits_{x\to+\infty} -3x^2 = -\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3-5x^2-8x+7 = \lim\limits_{x\to-\infty} -4x^3 = +\infty$

d) Cas des fonctions rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$

Propriété(s)

Quand x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, une fonction rationnelle admet la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

Exemple(s)

- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2+1}{2x+3} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{4x^2}{2x} = \lim\limits_{x\to+\infty} 2x = +\infty$
- $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2+x+3}{2x^3-4x^2+7x+1} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{6x^2}{2x^3} = \lim\limits_{x\to-\infty} 3\times\underbrace{\left(\dfrac{1}{x}\right)}_{\to 0} = 0$
- $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x-4}{6x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x}{6x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1}{2} = \dfrac{1}{2}$

xm1math.net

3. Détermination des limites

e) Exemple d'étude du comportement aux bornes d'une fonction rationnelle

Exemple(s)

Soit f la fonction rationnelle définie sur $]2\,;+\infty[$ par $f(x)=\dfrac{3x^2+1}{4-x^2}$ et C_f sa courbe dans un repère orthogonal.

1. C_f admet-elle une asymptote verticale ?
   Réponse : pour cela il faut regarder si la limite de f en 2 donne un ∞.

$$\lim_{\substack{x\to2\\x>2}} f(x) = \lim_{\substack{x\to2\\x>2}} \underbrace{\left(3x^2+1\right)}_{\to 3\times2^2+1=13} \times \underbrace{\left(\dfrac{1}{\underbrace{(4-x^2)}_{\to 0^-}}\right)}_{\to-\infty} = -\infty.$$

   Donc la droite d'équation $x=2$ est une asymptote verticale à C_f.

2. C_f admet-elle une asymptote horizontale ?
   Réponse : pour cela il faut regarder si la limite de f en $+\infty$ donne un nombre fini.
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{3x^2}{-x^2} = \lim\limits_{x\to+\infty} -3 = -3.$
   Donc la droite d'équation $y=-3$ est une asymptote horizontale à C_f en $+\infty$.

xm1math.net

Fin du chapitre

xm1math.net