Équations différentielles

▶ Exercice n°1

1. L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 0{,}1$.
   Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}1x}$.
2. $3y' = 5y \Leftrightarrow y' = \dfrac{5}{3}y \Leftrightarrow y' - \dfrac{5}{3}y = 0$.
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = -\dfrac{5}{3}$.
   Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} = k\,\mathrm{e}^{\frac{5}{3}x}$.
3. L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = -8$ et $b = 5$.
   Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-ax} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{8x} + \dfrac{5}{-8} = k\,\mathrm{e}^{8x} - \dfrac{5}{8}$.
4. $2y + 3y' - 1 = 0 \Leftrightarrow 3y' + 2y = 1 \Leftrightarrow y' + \dfrac{2}{3}y = \dfrac{1}{3}$.
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = \dfrac{2}{3}$ et $b = \dfrac{1}{3}$.
   Les solutions sont définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{2}{3}} = k\,\mathrm{e}^{-\frac{2}{3}x} + \dfrac{1}{2}$.

▶ Exercice n°2

15 mg de pénicilline sont injectés dans le sang d'un patient.
On suppose que l'injection est instantanée et que la vitesse de son élimination est proportionnelle à la quantité restant dans le sang.
On note t le temps écoulé, en minute, après injection de la pénicilline, et $f(t)$ la quantité, en milligramme, de pénicilline présente dans le sang à l'instant t.
La fonction f, ainsi définie, est la solution de l'équation différentielle $y' = -0{,}04y$ telle que $f(0) = 15$.

1. • Recherche de la forme des solutions de $y' = -0{,}04y$:
   $y' = -0{,}04y \Leftrightarrow y' + 0{,}04y = 0$.
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = 0{,}04$.
   Les solutions sont définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}$.
   • Recherche de la solution telle que $f(0) = 15$:
   $f(0) = 15 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} = 15 \Leftrightarrow k = 15$.
   La solution cherchée est donc définie par $f(t) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}$.
2. $f(40) = 15\,\mathrm{e}^{-0{,}04\times 40} \approx 3{,}03$ mg.
3. $f'(t) = 15\left(-0{,}04\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}\right) = -0{,}6\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}$ qui reste toujours négatif car un exponentiel est toujours strictement positif. Donc f est strictement décroissante sur $[0\ ;\ +\infty[$.
4. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}04t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}04t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 0$.
5. Quantité moyenne $= \dfrac{1}{30-0}\displaystyle\int_0^{30} f(t)\,\mathrm{d}t = \dfrac{1}{30}\int_0^{30} 15\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}\,\mathrm{d}t$
   $= \dfrac{1}{30}\left[\dfrac{15}{-0{,}04}\mathrm{e}^{-0{,}04t}\right]_0^{30} = \dfrac{1}{30}\left[-375\,\mathrm{e}^{-0{,}04t}\right]_0^{30} = \dfrac{1}{30}\left[-375\,\mathrm{e}^{-1{,}2} + 375\right]$
   $= -12{,}5\,\mathrm{e}^{-1{,}2} + 12{,}5 \approx 8{,}73$ mg

▶ Exercice n°3

1. • Recherche de la forme des solutions de $y' = -(\ln 100)y$:
   $y' = -(\ln 100)y \Leftrightarrow y' + (\ln 100)y = 0$.
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = 0$ avec $a = \ln 100$.
   Les solutions sont définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} = k\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$.
   $N(t)$ est donc de la forme $N(t) = k\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$.
   • Recherche de la solution telle que $N(0) = 1500$:
   $N(0) = 1500 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} = 1500 \Leftrightarrow k = 1500$.
   La solution cherchée est donc définie par $N(t) = 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t}$.
2. $N(1) = 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)} = 1500\,\mathrm{e}^{\ln\left(\frac{1}{100}\right)} = 1500 \times \dfrac{1}{100} = 15$ tours par minute.
3. Cela revient à chercher t tel que $N(t) = 1$:
   $N(t) = 1 \Leftrightarrow 1500\,\mathrm{e}^{-(\ln 100)t} = 1 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-(\ln 100)t} = \dfrac{1}{1500}$
   $\Leftrightarrow -(\ln 100)t = \ln\left(\frac{1}{1500}\right) \Leftrightarrow -(\ln 100)t = -(\ln 1500)$
   $\Leftrightarrow t = \dfrac{\ln 1500}{\ln 100} \approx 1{,}6$ minutes.

▶ Exercice n°4

1. • Recherche de la forme des solutions de $y' + 0{,}0001y = 0{,}01$:
   L'équation différentielle est de la forme $y' + ay = b$ avec $a = 0{,}0001$ et $b = 0{,}01$.
   Les solutions sont définies par $f(t) = k\,\mathrm{e}^{-at} + \dfrac{b}{a} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t} + \dfrac{0{,}01}{0{,}0001} = k\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t} + 100$.
   • Recherche de la solution telle que $f(0) = 20$:
   $f(0) = 20 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0} + 100 = 20 \Leftrightarrow k = -80$.
   La solution cherchée est donc définie par $f(t) = -80\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t} + 100$
2. $\lim\limits_{t\to+\infty} -0{,}0001t = -\infty$, donc $\lim\limits_{t\to+\infty} \mathrm{e}^{-0{,}0001t} = 0$ et $\lim\limits_{t\to+\infty} -80\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t} = 0$.
   On en déduit que $\lim\limits_{t\to+\infty} f(t) = 100$.
3. $f'(t) = -80\left(-0{,}0001\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t}\right) = 0{,}008\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t} > 0$ sur $[0\,;+\infty[$. f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

4. Cela revient à chercher t tel que $f(t)=85$.
$-80\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t}+100=85 \Leftrightarrow -80\,\mathrm{e}^{-0{,}0001t}=-15 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}0001t}=\dfrac{15}{80} \Leftrightarrow$
$\mathrm{e}^{-0{,}0001t}=0{,}1875 \Leftrightarrow -0{,}0001t=\ln(0{,}1875)$
$\Leftrightarrow t=\dfrac{\ln(0{,}1875)}{-0{,}0001}\approx 16740$ secondes. Ce qui correspond à 4 heures et 39 minutes.

▶ Exercice n°5

1. • Recherche de la forme des solutions de $y'+0{,}005y=6$:
L'équation différentielle est de la forme $y'+ay=b$ avec $a=0{,}005$ et $b=6$.
Les solutions sont définies par :
$f(t)=k\,\mathrm{e}^{-at}+\dfrac{b}{a}=k\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}+\dfrac{6}{0{,}005}=k\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}+1200.$
• Recherche de la solution telle que $f(0)=0$:
$f(0)=0 \Leftrightarrow k\,\mathrm{e}^{0}+1200=0 \Leftrightarrow k=-1200.$
La solution cherchée est donc définie par $f(t)=-1200\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}+1200$
2. 2% correspond à un volume de $\dfrac{2}{100}\times 30000=600$ litres. On cherche donc t tel que $f(t)=600$.
$-1200\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}+1200=600 \Leftrightarrow -1200\,\mathrm{e}^{-0{,}005t}=-600 \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-0{,}005t}=0{,}5$
$\Leftrightarrow -0{,}05t=\ln 0{,}5 \Leftrightarrow t=\dfrac{\ln 0{,}5}{-0{,}005}\approx 139$ minutes.