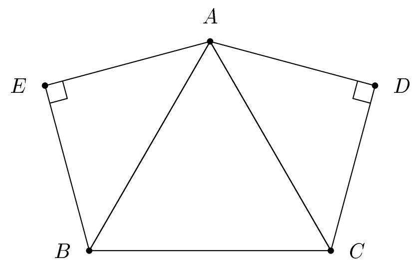
Trigonométrie - Fonctions circulaires

▶ Exercice n°1

Le plan est orienté et muni d'un repère orthonormé **direct**.
Dans la figure ci-dessous, ABC est un triangle équilatéral et ADC et AEB sont des triangles rectangles isocèles.



Déterminer une mesure des angles orientés suivants :

- $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right)$
- $\left(\overrightarrow{DC}, \overrightarrow{DA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{EB}, \overrightarrow{EA}\right)$
- $\left(\overrightarrow{CB}, \overrightarrow{CD}\right)$
- $\left(\overrightarrow{AE}, \overrightarrow{AD}\right)$
- $\left(\overrightarrow{BC}, \overrightarrow{BE}\right)$

▶ Exercice n°2

Déterminer la mesure principale des angles orientés de mesure :
$\dfrac{13\pi}{6}$; $-\dfrac{37\pi}{3}$; $\dfrac{19\pi}{6}$; $-\dfrac{21\pi}{8}$; $\dfrac{23\pi}{4}$; $-\dfrac{121\pi}{4}$; $\dfrac{1001\pi}{3}$; 11π ; -20π ; 1998π ; 235π

▶ Exercice n°3

1. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \dfrac{\sqrt{3}}{5}$ et $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \dfrac{1-\sqrt{5}}{4}$ et $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.
3. Calculer $\sin x$ sachant que $\cos x = \sqrt{3} - 2$ et $x \in \left[-\pi; -\dfrac{\pi}{2}\right]$.

▶ Exercice n°4

1. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{3}{4}$; $x \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$.
2. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{-2}{\sqrt{5}}$; $x \in \left[-\dfrac{\pi}{2}; 0\right]$.
3. Calculer $\cos x$ sachant que $\sin x = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$; $x \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$.

▶ Exercice n°5

Exprimer en fonction de $\cos x$ et $\sin x$ les expressions suivantes :

- $A(x) = \cos\left(\dfrac{\pi}{2} + x\right) + \cos(2\pi - x) + 2\sin(\pi - x) + \cos(\pi + x)$
- $B(x) = \cos(\pi - x) + \cos\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right) - \sin\left(\dfrac{\pi}{2} - x\right)$
- $C(x) = \sin(\pi + x) + \sin(3\pi - x) + \sin(x - 7\pi) - \sin(9\pi - x)$
- $D(x) = \cos\left(\dfrac{5\pi}{2} - x\right) + \cos(\pi - x) + \sin(5\pi - x)$

▶ Exercice n°6

Déterminer les valeurs exactes de :
$\cos\left(\dfrac{7\pi}{3}\right)$; $\sin\left(-\dfrac{13\pi}{4}\right)$; $\cos\left(\dfrac{31\pi}{6}\right)$; $\sin(-15\pi)$; $\cos(10\pi)$; $\sin\left(-\dfrac{7\pi}{2}\right)$ et $\cos\left(\dfrac{15\pi}{2}\right)$

▶ Exercice n°7

Résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

1. $\sin x = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$.
2. $\sin x = 1$.
3. $2(\sin x)^2 - 1 = 0$.
4. $\sin(2x) = \dfrac{1}{2}$.
5. $\sin\left(2x - \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin x$.
6. $\sin\left(x + \dfrac{\pi}{6}\right) = \sin\left(3x - \dfrac{\pi}{3}\right)$.

▶ Exercice n°8

1. $\cos x = -\dfrac{\sqrt{2}}{2}$.
2. $\cos x = -\dfrac{6}{5}$.

3. $\cos x = \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$.
4. $\cos\left(\frac{\pi}{3} - 2x\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
5. $\cos\left(3x + \frac{\pi}{3}\right) = \cos\left(x - \frac{\pi}{6}\right)$.

▶ Exercice n°9

Résoudre dans l'intervalle I les équations suivantes :

1. $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$ dans $I = \left[0; \frac{2\pi}{3}\right]$.
2. $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = 0$ dans $I = [0; \pi]$.

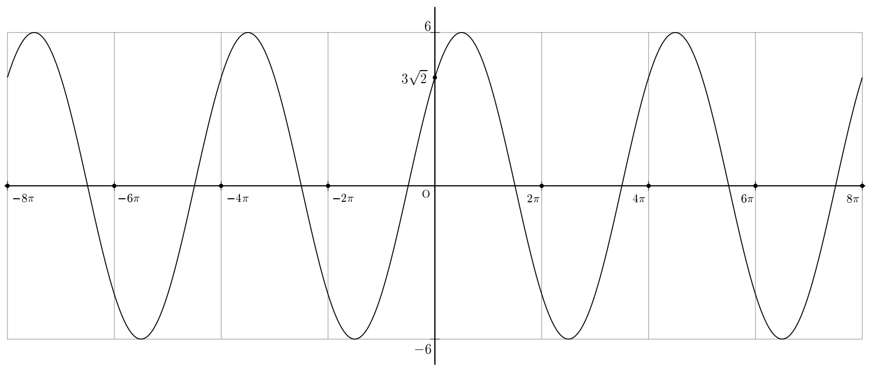
▶ Exercice n°10

Déterminer une période de la fonction f dans les cas suivants :

1. $f(x) = \sin(2x)$.
2. $f(x) = 3\cos\left(\frac{1}{2}x\right)$.
3. $f(x) = \sin\left(3x - \frac{\pi}{6}\right)$.
4. $f(x) = 3\cos(2x) - \sin x$.
5. $f(x) = 2\cos\left(\frac{1}{3}x\right) - \cos\left(\frac{1}{4}x\right)$.

▶ Exercice n°11

La courbe représentative d'une fonction périodique f est donnée ci-dessous :

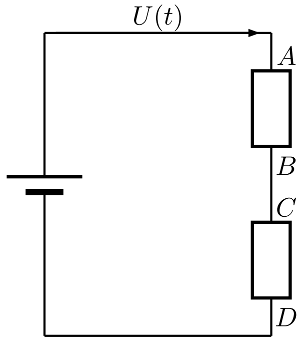


1. À l'aide du graphique, déterminer la (plus petite) période T de la fonction f.
2. La fonction f est en fait de la forme $f(x) = r\cos(\omega x + \varphi)$ avec $\varphi \in \left[0\,;\, \frac{\pi}{2}\right]$.
   a) En utilisant que $T = \frac{2\pi}{\omega}$, déterminer la valeur de ω.
   b) En utilisant que, pour tout x, $-1 \leqslant \cos(\omega x + \varphi) \leqslant 1$, déterminer la valeur de r.
   c) En utilisant la valeur de $f(0)$ donnée sur le graphique, déterminer la valeur de φ.

▶ Exercice n°12

Dans le circuit ci-dessous :

- la tension $U_{AB}(t)$ est égale à $3\sqrt{2}\sin\left(100\pi t + \frac{\pi}{3}\right)$
- la tension $U_{CD}(t)$ est égale à $4\sqrt{2}\sin\left(100\pi t - \frac{\pi}{4}\right)$
- la tension $U(t)$ est égale à $U_{AB}(t) + U_{CD}(t)$



1. Calculer la valeur exacte de $U(0)$.
2. Déterminer la période de $U(t)$.
3. Déterminer la première valeur de t pour laquelle $U_{CD}(t) = 4$.