Fonctions

▶ Exercice n°1

Soit f la fonction définie par $f(x) = \dfrac{x^2-3}{x-2}$.

1. Déterminer l'ensemble de définition de f.
2. Calculer les images par f de 3 et -1 .
3. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 0.
4. Déterminer le(s) antécédent(s) éventuel(s) par f de 4.
5. Déterminer les réels m qui n'admettent qu'un unique antécédent par f.

▶ Exercice n°2

On donne ci-dessous le tableau de variations d'une fonction f définie sur $[0\ ;\ 7]$.

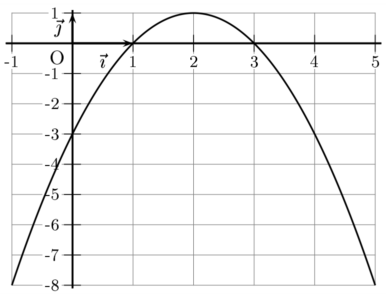
x	0		4		7
$f(x)$	2	$\searrow$	-3	$\nearrow$	-1

Déterminer, en justifiant votre réponse, si les propositions ci-dessous sont vraies ou fausses :

- *Proposition 1 :* $f(2) \geqslant f(3)$
- *Proposition 2 :* $f(-3) = 4$
- *Proposition 3 :* l'équation $f(x) = 0$ admet deux solutions dans $[0\ ;\ 7]$
- *Proposition 4 :* -3 est un minimum de f sur $[0\ ;\ 7]$

▶ Exercice n°3

Soit f la fonction définie sur $[-1; 5]$ dont la courbe est donnée ci-dessous :



1. Déterminer graphiquement les valeurs de $f(-1)$, $f(0)$ et $f(1)$.
2. Déterminer graphiquement les antécédents de -3 par f.
3. Dans quel intervalle varie $f(x)$ quand x varie dans $[-1; 5]$?
4. Résoudre graphiquement dans $[-1; 5]$ les équations suivantes :
   a) $f(x) = 0$
   b) $f(x) = 2$
   c) $f(x) = 1$
   d) $f(x) = x - 3$
5. Résoudre graphiquement dans $[-1; 5]$ les inéquations suivantes :
   a) $f(x) \geqslant 0$
   b) $f(x) \geqslant x - 3$

▶ Exercice n°4

Compléter les inégalités suivantes :

1. Si $2 < x < 5$ alors $\dots < x^3 < \dots$ et $\dots < \dfrac{1}{x^3} < \dots$
2. Si $1 \leqslant x \leqslant 3$ alors $\dots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \dots$ et $\dots \leqslant -4\sqrt{x} \leqslant \dots$
3. Si $-4 \leqslant x \leqslant -1$ alors $\dots \leqslant x^2 \leqslant \dots$.

   Donc, $\dots \leqslant x^2 + 4 \leqslant \dots$ et $\dots \leqslant \sqrt{x^2+4} \leqslant \dots$
4. Si $-12 \leqslant -\dfrac{3}{x} \leqslant -3$ alors $\dots \leqslant \dfrac{1}{x} \leqslant \dots$ donc $\dots \leqslant x \leqslant \dots$
5. Si $-1 \leqslant 4 - \sqrt{x} \leqslant 2$ alors $\dots \leqslant -\sqrt{x} \leqslant \dots$.

   Donc, $\dots \leqslant \sqrt{x} \leqslant \dots$ et $\dots \leqslant x \leqslant \dots$

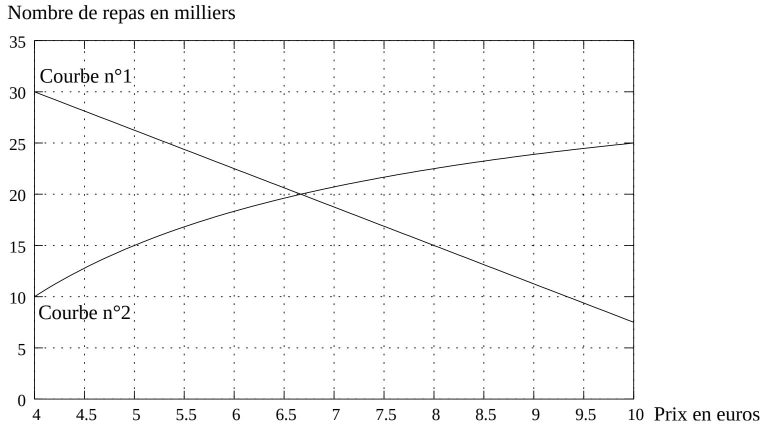
▶ Exercice n°5

Une chaîne de restauration rapide fait une étude de marché pour fixer le prix de ses plats chauds comprenant un légume et une viande.

On appelle **offre** le nombre de repas proposés et **demande** le nombre de repas susceptibles d'être vendus. On étudie l'offre et la demande dans un intervalle compris entre 4 euros et 10 euros.

- La demande (en milliers de repas) est une fonction d du prix x (en euros) définie par $d(x) = -3,75x + 45$.
- L'offre (en milliers de repas) est une fonction f du prix x (en euros) définie par $f(x) = -\dfrac{100}{x} + 35$

1. Calculer la valeur de la demande et de l'offre si on fixe le prix du repas à 4 euros.
2. La figure ci-dessous donne la représentation graphique des fonctions d et f sur l'intervalle $[4\,;\,10]$. Indiquer les numéros correspondants aux courbes de d et f.



3. Lorsque l'offre est égale à la demande, on dit qu'on a atteint un prix d'équilibre.
   a) Déterminer d'après le graphique le nombre prévisible de repas correspondant à ce prix d'équilibre.
   b) Déterminer par le calcul le prix d'équilibre.

▶ Exercice n˚6

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{2\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2 - 1}{x - 2}$ et g la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $g(x) = x^2$.
Étudier la position relative des les courbes représentatives de f et g sur $\mathbb{R} - \{2\}$.

▶ Exercice n˚7

Soit f la fonction définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{5x}{4x + 8}$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = \dfrac{5}{4}$.

▶ Exercice n˚8

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{3x^2 + 5}{2x^2 + 1}$.

Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = \dfrac{3}{2}$.

▶ Exercice n˚9

Soit f la fonction définie sur $[0\,;\,+\infty[$ par $f(x) = x + \sqrt{x}$.

1. Montrer que, si $0 \leqslant a < b$, alors $a + \sqrt{a} < b + \sqrt{b}$. Que peut-on en déduire sur le sens de variation de la fonction f sur $[0\,;\,+\infty[$?
2. On cherche à créer un algorithme qui permette de compléter automatiquement le tableau de valeurs suivant :

x	0	$0,5$	1	$1,5$	2	$2,5$	3	$3,5$	4	$4,5$	5
$y = f(x)$											

Pour cela, on utilise le principe suivant : pour chaque valeur de x, on calcule la valeur correspondante de y et on augmente la valeur de x de $0,5$ **tant que** la fin du tableau n'est pas atteinte.
Compléter les lignes 6, 8 et 13 pour que l'algorithme AlgoBox ci-dessous réponde au problème :

```
1   VARIABLES
2     x EST_DU_TYPE NOMBRE
3     y EST_DU_TYPE NOMBRE
4   DEBUT_ALGORITHME
5     x PREND_LA_VALEUR 0
6     TANT_QUE (x.....) FAIRE
7       DEBUT_TANT_QUE
8       y PREND_LA_VALEUR ...........
9       AFFICHER "Si x vaut "
10      AFFICHER x
11      AFFICHER " alors y vaut "
12      AFFICHER y
13      x PREND_LA_VALEUR ...........
14      FIN_TANT_QUE
15  FIN_ALGORITHME
```

▶ Exercice n˚10

On considère la proposition suivante : « Si f est une fonction croissante sur $\mathbb{R}$ alors, pour tout x, $f(x)$ est positif ».

1. Exprimer la **négation** de cette proposition.
2. Exprimer la **réciproque** de cette proposition.
3. La proposition est-elle vraie ?
4. La réciproque de la proposition est-elle vraie ?