Applications de la dérivation

▶ Exercice n°1
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 4x - 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente T à la courbe C_f au point d'abscisse 1.

▶ Exercice n°2
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 + 6x + 5$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer l'abscisse des points d'intersection entre la courbe C_f et la droite D d'équation $y = \dfrac{1}{2}x - 2$.

▶ Exercice n°3
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point A d'abscisse -3.

▶ Exercice n°4
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$.

1. Étudier les variations de f.
2. Préciser la valeur de $f(-1)$. En déduire le signe de $f(x)$ suivant les valeurs de x.

▶ Exercice n°5
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \left\{\dfrac{3}{2}\right\}$ par $f(x) = \dfrac{x+3}{2x-3}$.

▶ Exercice n°6
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2}{x^2+1}$.

▶ Exercice n°7
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-4x-4}{x^2+2x+5}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
3. Déterminer une équation de la tangente à la courbe C_f au point A.

▶ Exercice n°8
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{-4x+8}{x^2-4x+5}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Déterminer les coordonnées du point A, intersection entre la courbe C_f et l'axe des abscisses.
3. Montrer que la tangente T à C_f au point A a pour équation $y = -4x + 8$.
4. Factoriser et étudier le signe de $f(x) - (-4x + 8)$. En déduire la position de la courbe C_f par rapport à la tangente T.

▶ Exercice n°9
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{2x^2+x-1}{x^2-x+1}$.

▶ Exercice n°10
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{0; 3\}$ par $f(x) = \dfrac{x^2-2x+1}{2x^2-6x}$.

▶ Exercice n°11
Étudier les variations de la fonction f définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = x + 1 + \dfrac{9}{x-1}$.

▶ Exercice n°12
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x - 1 + \dfrac{2x}{x^2+1}$.

1. Étudier les variations de f.
2. Étudier la position relative de la courbe C_f et de la droite D d'équation $y = x - 1$ sur $\mathbb{R}$.
3. Déterminer une équation de T, la tangente à la courbe au point d'abscisse 0.
4. Montrer qu'il existe deux points de la courbe où la tangente est parallèle à la droite D.
5. Montrer que pour tout x, $\quad x - 2 \leqslant f(x) \leqslant x$.

▶ Exercice n°13
Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R} - \{1\}$ par $f(x) = \dfrac{x^3 - 2x^2}{(x-1)^2}$.

1. Calculer et factoriser $f'(x)$.
2. Étudier les variations de f.
3. Déterminer les coordonnées des points d'intersection de la courbe avec l'axe des abscisses et déterminer une équation des tangentes à la courbe en ces points.

4. Montrer qu'il existe un point de la courbe où la tangente T admet un coefficient directeur égal à 1. Donner une équation de T.

► Exercice n°14

On admet que lorsque la vitesse d'une voiture est comprise entre 20 et 130 $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$, la consommation d'essence en fonction de la vitesse v (en $\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$) est donnée par : $C(v) = 0,06\,v + \dfrac{150}{v}$. En étudiant les variations de la fonction C, déterminer la vitesse pour laquelle la consommation est minimale.

► Exercice n°15

Dans une entreprise, le coût total en euros pour produire q objets est :
$C(q) = 150000 + 20q + \dfrac{1}{50}q^2$. Chaque produit est vendu 190 euros.

1. On note $B(q)$ le bénéfice réalisé en vendant q objets. Exprimer $B(q)$ en fonction de q.
2. Étudier les variations de la fonction B sur $[1000; 7500]$.
3. En déduire la valeur de q pour laquelle le bénéfice est maximal.

► Exercice n°16

On suppose que la quantité demandée d'un article en vente dépend de son prix de vente p (en euros) et est égale à $f(p) = 27200 - 400p$ pour $p \in [20\,;\,50]$.

1. Exprimer la recette $R(p)$ en fonction de p.
2. Étudier les variations de la fonction R sur $[20\,;\,50]$.
3. En déduire la valeur de p pour laquelle la recette est maximale.
4. L'élasticité $E(p)$ de la demande par rapport au prix p est définie par $E(p) = p \times \dfrac{f'(p)}{f(p)}$. *(l'élasticité mesure la variation de la demande par rapport à la variation du prix)*
   Montrer que, pour la valeur de p pour laquelle la recette est maximale, l'élasticité est égale à -1.

► Exercice n°17

On considère trois nombres a, b et c et leur moyenne $\overline{x} = \dfrac{a+b+c}{3}$. On note f la fonction (mesurant la « distance » avec a, b et c) définie par :
$f(x) = \dfrac{(x-a)^2 + (x-b)^2 + (x-c)^2}{3}$.

1. Dériver f et montrer que $f'(x) = 2(x - \overline{x})$.
2. Dresser le tableau de variations de f et montrer que le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est égal à la variance de la série formée par les nombres a, b et c.

► Exercice n°18

On considère une casserole de rayon x et de hauteur h (on ne tient pas compte de la poignée).

1. Exprimer le volume V de la casserole en fonction de x et de h.
2. Montrer que la surface S de la casserole est égale à $\pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$.
3. Pour un volume V donné (donc constant), on cherche à déterminer x pour que la surface S soit minimale. Pour cela on considère la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \pi x^2 + \dfrac{2V}{x}$.
   Dériver f et montrer que f' s'annule pour $x = h$.

► Exercice n°19

Soit f une fonction dérivable sur $\mathbb{R}$.
Quelle est la contraposée de la propriété suivante :
« *Si ,pour tout x, $f'(x) = 0$ alors f est constante sur $\mathbb{R}$* »