

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Pour tout a :	$x < y \Leftrightarrow x + a < y + a$	<i>même sens</i>
Pour tout $k > 0$:	$x < y \Rightarrow kx < ky$	<i>même sens</i>
Pour tout $k < 0$:	$x < y \Rightarrow kx > ky$	<i>sens contraire</i>
Pour x et y de même signe :	$x < y \Rightarrow \frac{1}{x} > \frac{1}{y}$	<i>sens contraire</i>
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow x^2 < y^2$	<i>même sens</i>
Pour $x > 0$ et $y > 0$:	$x < y \Rightarrow \sqrt{x} < \sqrt{y}$	<i>même sens</i>
Si f croissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \leq f(y)$	<i>même sens</i>
Si f décroissante * :	$x < y \Rightarrow f(x) \geq f(y)$	<i>sens contraire</i>

(* sur un intervalle contenant x et y)

► Exemple :

- Sachant que $3 < x < 5$, que peut-on en conclure pour $\frac{1}{3-x}$?
- $$3 < x < 5 \Rightarrow -5 < -x < -3 \Rightarrow -2 < 3-x < 0 \Rightarrow \frac{1}{3-x} < -\frac{1}{2}$$

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $-1 \leq \cos x \leq 1$; $-1 \leq \sin x \leq 1$.

c) Signe de $ax + b$ ($a \neq 0$)

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$	$-\frac{b}{a}$	$+\infty$
$ax + b$	signe de $(-a)$		signe de a

d) Signe de $ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$)

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)

- Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	

- Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\frac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de a

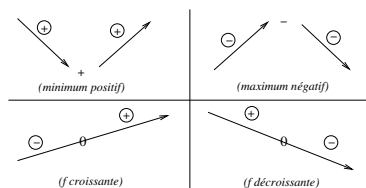
- Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$	x_1	x_2	$+\infty$
$ax^2 + bx + c$	signe de a	0	signe de $(-a)$	signe de a

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2) Étude de fonction

a) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l + l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l'} \rightarrow l \times l'$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l > 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow -\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l < 0} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow +\infty$
$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \rightarrow +\infty$	$\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} \rightarrow -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow l \neq 0}} \right) \rightarrow \frac{1}{l}$	$\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty}} \right) \rightarrow 0$	$\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^+}} \right) \rightarrow +\infty$	$\left(\frac{1}{\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0^-}} \right) \rightarrow -\infty$
--	---	---	---

• Limite d'un quotient :

Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\frac{(\quad)}{(\quad)} = (\quad) \times \frac{1}{(\quad)}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow -\infty}$; $\underbrace{(\quad)}_{\rightarrow \pm\infty} \times \underbrace{(\quad)}_{\rightarrow 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
- En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur (ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).

b) Asymptotes

- Si $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f .
- Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.

c) Position relative de deux courbes

Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g , on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales) :

- si $f(x) - g(x) \geq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située au dessus de C_g sur I .
- si $f(x) - g(x) \leq 0$ pour tout x d'un intervalle I , alors C_f est située en dessous de C_g sur I .

d) Dérivation

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \frac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1}{x^2}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$
$f(x) = \cos x \Rightarrow f'(x) = -\sin x$	$f(x) = \sin x \Rightarrow f'(x) = \cos x$	

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée	Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$	f^2	$2f'f$
kf (k réel)	kf'	$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
fg	$f'g + fg'$	$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$

e) Tangente

- Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ (le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
- Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente admet un coefficient directeur égal à m , il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$.

3) Primitives

- F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I , $F'(x) = f(x)$.
- Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
- Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I .

• Primitives des fonctions usuelles : (F représente une primitive de f)

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \frac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \frac{x^4}{4}$
$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{x}$	$f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{2x^2}$
$f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$	
$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$
$f(x) = \sin(ax + b) \Rightarrow F(x) = -\frac{1}{a} \cos(ax + b)$	$f(x) = \cos(ax + b) \Rightarrow F(x) = \frac{1}{a} \sin(ax + b)$

• Formules générales :

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\frac{U^2}{2}$	$f(x) = \cos x \times \sin x \Rightarrow F(x) = \frac{(\sin x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\frac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x + 1)^2 \Rightarrow F(x) = \frac{(4x + 1)^3}{3}$
$\frac{U'}{U^2}$ ($U(x) \neq 0$)	$-\frac{1}{U}$	$f(x) = \frac{3x^2}{(x^3 + 1)^2} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{x^3 + 1}$
$\frac{U'}{U^3}$ ($U(x) \neq 0$)	$-\frac{1}{2U^2}$	$f(x) = \frac{7}{(7x + 1)^3} \Rightarrow F(x) = \frac{-1}{2(7x + 1)^2}$

• Recherche pratique d'une primitive :

Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.

Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante.

Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple* : Soit f définie sur $] -2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\frac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\frac{-1}{U}$). On écrit que $f(x) = \frac{1}{3} \times \underbrace{\frac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $] -2; +\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{3} \times \frac{-1}{(3x+6)}$.

4) Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$; e^x existe pour tout réel x .

► *Exemple* :

La fonction f définie par $f(x) = \ln(x-1)$ n'est définie que sur $]1; +\infty[$ car il faut que $x-1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

• $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

c) Valeurs particulières

• $\ln 1 = 0$; $\ln e = 1$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$; $e^{-1} = \frac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\frac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\frac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$

Pour tout entier n , $\ln(a^n) = n \ln a$; $\ln \sqrt{a} = \frac{1}{2} \ln a$

Pour tous réels a et b :

$e^a \times e^b = e^{a+b}$; $\frac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\frac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$; Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $(e^a)^n = e^{an}$

► *Exemples* :

Si $x > 0$, $\ln\left(\frac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2 \ln x$

Pour tout x , $(e^{-x})^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

• **Signe de $\ln x$** :

Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.

Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.

$\ln 1 = 0$.

• **Signe de e^x** : pour tout réel x , e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

• Si $a > 0$ et $b > 0$:

$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leq \ln b \Leftrightarrow a \leq b$

• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leq e^b \Leftrightarrow a \leq b$

• $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a$; $\ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a$; $\ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$

• Si $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a$; $e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a$; $e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

► **Remarque :**

Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

► **Exemples d'équations et d'inéquations :**

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.

Avec cette condition :

$$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \frac{e^5}{2}. \quad S = \left\{ \frac{e^5}{2} \right\}$$

• $\ln(x+2) \leq 1$. Condition d'existence : $x+2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.

Avec cette condition :

$$\ln(x+2) \leq 1 \Leftrightarrow x+2 \leq e \Leftrightarrow x \leq e-2. \quad S =]-2; e-2]$$

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.

$$\Delta = 16; \quad X = -1 \text{ ou } X = 3.$$

D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$

$$\bullet e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \frac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5 \text{ (car } e^x > 0) \Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \frac{\ln 5}{2}. \quad S = \left] -\infty; \frac{\ln 5}{2} \right[.$$

g) Limites

Situation en $+\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x = +\infty$$

$$\bullet \text{ Pour tout entier } n > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x^n} = 0; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{\ln x} = +\infty$$

(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \text{ Pour tout entier } n > 0, \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x^n} = +\infty; \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^n}{e^x} = 0$$

(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

► **Exemples :**

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \ln x - x = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{\ln x}{x} - 1 \right) = -\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3e^x - x^2 = \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x \left(3 - \frac{x^2}{e^x} \right) = +\infty \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} e^x = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x + 1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} \times \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{e^x}\right)} = 0 \text{ car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0 \text{ et } \lim_{x \rightarrow +\infty} 1 + \frac{1}{e^x} = 1$$

Situation en 0 :

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \ln x = -\infty$$

$$\bullet \text{ Pour tout entier } n > 0, \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x^n \times \ln x = 0$$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.

► **Exemple :**

$$\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} (1 + x \ln x) = +\infty \text{ car } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} x \ln x = 0$$

Situation en $-\infty$:

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$$

$$\bullet \text{ Pour tout entier } n > 0, \lim_{x \rightarrow -\infty} x^n \times e^x = 0$$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.

► **Exemple :** $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x (x^2 + 1) = \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x + e^x = 0$ car $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^x = 0$ et $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x = 0$

h) Dérivées et primitives

- $(\ln x)' = \frac{1}{x}$; $(\ln u)' = \frac{u'}{u}$ ($u > 0$)
- $(e^x)' = e^x$; $(e^u)' = u'e^u$

► Exemples :

$$[\ln(x^2 + 1)]' = \frac{2x}{x^2 + 1} ; [e^{-x}]' = -e^{-x}$$

- Si $U > 0$, une primitive de $\frac{U'}{U}$ est $\ln U$.
- Une primitive de $U'e^U$ est e^U .

► Exemples :

- Soit f définie sur $]2; +\infty[$ par $f(x) = \frac{1}{4x-8}$. On écrit que $f(x) = \frac{1}{4} \times \underbrace{\frac{4}{4x-8}}_{\text{forme exacte } \frac{U'}{U}}$.

Une primitive de f sur $]2; +\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \frac{1}{4} \ln(4x-8)$.

- Si $f(x) = e^{-x} = -(-e^{-x})$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = -e^{-x}$.

- Si $f(x) = e^{4x+5}$, on écrit que $f(x) = \frac{1}{4} \times \underbrace{(4e^{4x+5})}_{\text{forme exacte } U'e^U}$.

Une primitive de f est donc définie par $F(x) = \frac{1}{4} e^{4x+5}$.

5) Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans \mathbb{C}

- Tout complexe s'écrit de façon unique sous la **forme algébrique** $z = a + ib$ (a et b réels) avec $i^2 = -1$.
- a est la **partie réelle** et b est la **partie imaginaire**.
- Le conjugué de z est $\bar{z} = a - ib$.
- Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique :
 - si le dénominateur est de la forme ib , on multiplie en haut et en bas par i ;
 - si le dénominateur est de la forme $a + ib$, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur.

► Exemples de calculs dans \mathbb{C} :

$$\bullet 3i(3 + 4i) = 3i + 12i^2 = -12 + 3i$$

$$\bullet (1 + 2i)^2 = 1^2 + 2 \times 1 \times 2i + (2i)^2 = 1 + 4i - 4 = -3 + 4i$$

$$\bullet \frac{3}{i} = \frac{3}{i} \times \frac{i}{i} = \frac{3i}{-1} = -3i$$

$$\bullet \frac{2+i}{3+2i} = \frac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)} = \frac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2} = \frac{8-i}{13}$$

$$\bullet \text{Résolution de l'équation } \frac{1+iz}{-1+3i} = z : \frac{1+iz}{-1+3i} = z \Leftrightarrow 1+iz = (-1+3i)z$$

$$\Leftrightarrow 1 = (-1+2i)z \Leftrightarrow z = \frac{1}{-1+2i} = \frac{1}{-1+2i} \times \frac{-1-2i}{-1-2i} = \frac{-1-2i}{1^2+2^2} = \frac{-1-2i}{5}$$

Propriétés sur les conjugués :

$$\overline{z+z'} = \bar{z} + \bar{z}' ; \quad \overline{z \cdot z'} = \bar{z} \cdot \bar{z}' ; \quad \overline{\left(\frac{z}{z'}\right)} = \frac{\bar{z}}{\bar{z}'} \quad (z' \neq 0).$$

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z = a + ib$ (a et b réels) :

• Le **module** de z est : $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

• Si $z \neq 0$, tout réel θ tel que
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{a}{|z|} = \frac{\text{partie réelle}}{\text{module}} \\ \sin \theta = \frac{b}{|z|} = \frac{\text{partie imaginaire}}{\text{module}} \end{cases}$$

est un **argument** de z . On note $\arg z = \theta + 2k\pi$ ($k \in \mathbb{Z}$)

• Pour tout θ , on pose $e^{i\theta} = \cos \theta + i \sin \theta$.

• $e^{i\theta} \times e^{i\theta'} = e^{i(\theta+\theta')}$; $\frac{1}{e^{i\theta}} = e^{-i\theta}$; $\frac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}} = e^{i(\theta-\theta')}$; $(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$

• $|e^{i\theta}| = 1$; $\overline{(e^{i\theta})} = e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)} = e^{i\theta}$

• Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z = r e^{i\theta}$ (**forme trigonométrique** ou forme exponentielle)

• Si $z = r e^{i\theta}$ avec $r > 0$ alors $|z| = r$ et $\arg z = \theta + 2k\pi$.

• $r e^{i\theta} = r' e^{i\theta'}$ (avec $r > 0$ et $r' > 0$) $\Leftrightarrow r = r'$ et $\theta = \theta' + 2k\pi$.

► *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*

Soit $z = \sqrt{3} + i$. $|z| = \sqrt{(\sqrt{3})^2 + 1^2} = 2$.
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{\sqrt{3}}{2} \\ \sin \theta = \frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{6}. \text{ D'où } z = 2e^{i\frac{\pi}{6}}.$$

► *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*

$z = 4e^{i\frac{\pi}{4}} = 4 \left(\cos \left(\frac{\pi}{4} \right) + i \sin \left(\frac{\pi}{4} \right) \right) = 4 \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + i \frac{\sqrt{2}}{2} \right) = 2\sqrt{2} + i2\sqrt{2}$.

► *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

• *Calcul de $(1 - i)^{12}$.* Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.

On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z = 1 - i$:

$|z| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$.
$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = -\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = -\frac{\pi}{4}. \text{ D'où } z = \sqrt{2} e^{-i\frac{\pi}{4}}.$$

$(1 - i)^{12} = z^{12} = (\sqrt{2})^{12} e^{-i\frac{12\pi}{4}} = 64 e^{-i3\pi} = 64 (\cos(-3\pi) + i \sin(-3\pi)) = -64$

• *Soit $z_1 = \sqrt{2} + i\sqrt{2}$ et $z_2 = \sqrt{3} + i$. Calculer la forme trigonométrique de z_1 , z_2 et $\frac{z_1}{z_2}$. En déduire la valeur de $\cos \left(\frac{\pi}{12} \right)$ et $\sin \left(\frac{\pi}{12} \right)$.*

En calculant le module et un argument de z_1 et z_2 , on montre que $z_1 = 2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $z_2 = 2e^{i\frac{\pi}{6}}$. On en déduit que

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}} = e^{i(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{6})} = e^{i\frac{\pi}{12}}.$$

Ainsi $\frac{\pi}{12}$ est un argument de $\frac{z_1}{z_2}$.

Or,
$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{\sqrt{2} + i\sqrt{2}}{\sqrt{3} + i} = \frac{(\sqrt{2} + i\sqrt{2})(\sqrt{3} - i)}{4} = \frac{(\sqrt{6} + \sqrt{2}) + i(\sqrt{6} - \sqrt{2})}{4}.$$

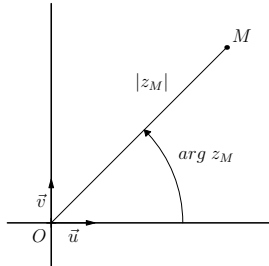
Donc,
$$\begin{cases} \cos \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\text{partie réelle de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{2}}{4} \\ \sin \left(\frac{\pi}{12} \right) = \frac{\text{partie imaginaire de } \frac{z_1}{z_2}}{\text{module de } \frac{z_1}{z_2}} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4} \end{cases}$$

c) Complexes et géométrie

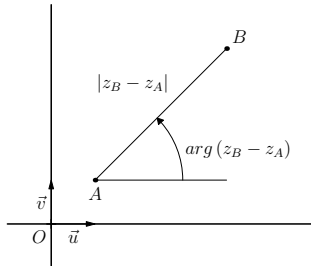
Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct (O, \vec{u}, \vec{v}) .

- L'affixe du point $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_M = x + iy$.
- L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \frac{z_A + z_B}{2}$.
- L'affixe du vecteur $\vec{V} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_{\vec{V}} = x + iy$.
- $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\vec{U} + \vec{V}} = z_{\vec{U}} + z_{\vec{V}}$; $z_{k\vec{U}} = k \cdot z_{\vec{U}}$

- Si M est d'affixe z alors $|z_M| = OM$ et $\arg z_M = (\vec{u}, \overrightarrow{OM})$ ($z \neq 0$).



- Si A et B sont deux points distincts d'affixes z_A et z_B alors la distance AB est égale à $|z_B - z_A|$ et $(\vec{u}, \overrightarrow{AB}) = \arg(z_B - z_A)$.



- Pour déterminer la nature d'un triangle ABC , il suffit de calculer ses côtés avec $AB = |z_B - z_A|, \dots$
- Pour montrer que deux vecteurs \vec{U} et \vec{V} sont colinéaires, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\vec{V}} = k \cdot z_{\vec{U}}$.
- Pour montrer que trois points A, B et C sont alignés, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{AC}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.
- Pour montrer que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, il suffit de montrer qu'il existe un réel k tel que $z_{\overrightarrow{CD}} = k \cdot z_{\overrightarrow{AB}}$.

- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ ($r > 0$) est le cercle de centre A et de rayon r (car $|z - z_A| = r \Leftrightarrow AM = r$).
- L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ ($z_A \neq z_B$) est la médiatrice du segment $[AB]$ (car $|z - z_A| = |z - z_B| \Leftrightarrow AM = BM$).

► *Exemple* : Soit A et B les points d'affixe $z_A = 2 + 2i$ et $z_B = 4i$.

La distance OA est égale à $|z_A| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

La distance OB est égale à $|z_B| = \sqrt{0^2 + 4^2} = 4$.

La distance AB est égale à $|z_B - z_A| = |4i - (2 + 2i)| = |-2 + 2i| = \sqrt{2^2 + 2^2} = \sqrt{8}$.

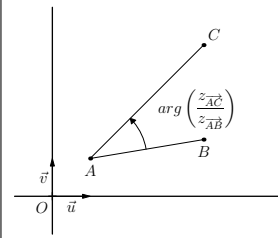
On en déduit que le triangle OAB est rectangle et isocèle en A car $AO = AB$ et $AO^2 + AB^2 = OB^2$.

Si on veut une mesure de l'angle $(\vec{u}, \overrightarrow{OA})$, il suffit de déterminer un argument de z_A :

$$\begin{cases} \cos \theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \\ \sin \theta = \frac{2}{\sqrt{8}} = \frac{\sqrt{2} \times \sqrt{2}}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \end{cases} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4} \Rightarrow (\vec{u}, \overrightarrow{OA}) = \frac{\pi}{4} + 2k\pi.$$

L'angle entre les vecteurs \vec{AB} et \vec{AC} est tel que $(\vec{AB}, \vec{AC}) = \arg \left(\frac{z_{AC}}{z_{AB}} \right)$

(avec $A \neq B$ et $A \neq C$)



6) Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :

• Pour tous a et b de I :

$$\int_a^b f(x) dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a) \text{ où } F \text{ est une primitive de } f \text{ sur } I.$$

► Exemple :

$$\int_0^{\ln 2} 3e^{3x} dx = [e^{3x}]_0^{\ln 2} = e^{3 \ln 2} - e^0 = e^{\ln(2^3)} - 1 = e^{\ln(8)} - 1 = 8 - 1 = 7.$$

Propriétés de l'intégrale :

Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :

- $\int_b^a f(x) dx = - \int_a^b f(x) dx.$
- $\int_a^b f(x) dx + \int_b^c f(x) dx = \int_a^c f(x) dx$ (Relation de Chasles)
- $\int_a^b (f + g)(x) dx = \int_a^b f(x) dx + \int_a^b g(x) dx$ (linéarité de l'intégrale)
- Pour tout réel k , $\int_a^b (kf)(x) dx = k \int_a^b f(x) dx$ (linéarité de l'intégrale)
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \geq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \geq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq 0$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq 0$
- Si $a \leq b$ et si $f(x) \leq g(x)$ sur $[a, b]$ alors $\int_a^b f(x) dx \leq \int_a^b g(x) dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle

Si f est continue sur $[a, b]$, la valeur moyenne de f sur $[a, b]$ est égale à $\frac{1}{b-a} \int_a^b f(x) dx$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b g(x) - f(x) dx$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leq 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f , l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $-\int_a^b f(x) dx$ en **unités d'aire**.

► Remarques :

• Pour avoir l'aire en cm^2 , il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :

(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) \times (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).

- Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord connaître leur position relative sur l'intervalle en question afin de savoir quelle est « la plus grande » et « la plus petite ».

7) Suites

a) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.

- Pour tout $n : U_{n+1} = q \times U_n ; U_n = q^n \times U_0 ; U_n = q^{n-p} \times U_p$
- Si pour tout $n, \frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \dots + U_n = U_p \times \frac{1 - q^{n-p+1}}{1 - q} = \text{1er terme} \times \frac{1 - q^{\text{nb de termes}}}{1 - q}$
(pour $q \neq 1$)

► *Exemple :*

Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.

$$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80 ; U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$$

Pour tout $n, U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

$$U_0 + U_1 + \dots + U_8 = 5 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555.$$

b) Limite de q^n avec $q > 0$

- si $0 < q < 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 0$.
- si $q > 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = +\infty$.
- si $q = 1$ alors $\lim_{n \rightarrow +\infty} q^n = 1$.

► *Exemples :*

- $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\sqrt{3})^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
- $\lim_{n \rightarrow +\infty} 3 \times (1 - (\frac{1}{2})^n) = 3$ car $0 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim_{n \rightarrow +\infty} (\frac{1}{2})^n = 0$ et $\lim_{n \rightarrow +\infty} 1 - (\frac{1}{2})^n = 1$.

c) Détermination du plus petit entier n tel que $q^n \geq a$ (si $q > 1$) ou tel que $q^n \leq a$ (si $0 < q < 1$)

Méthode : on isole q^n et on utilise que $\ln(q^n) = n \ln q$.

► *Exemples :*

- Recherche du plus petit entier n tel que $2^n \geq 3000$:

$$2^n \geq 3000 \Leftrightarrow \ln(2^n) \geq \ln(3000) \Leftrightarrow n \ln 2 \geq \ln 3000 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 3000}{\ln 2} \text{ (car } \ln 2 > 0 \text{)}.$$

Or $\frac{\ln 3000}{\ln 2} \approx 11,55$. Le plus petit entier qui convient est donc 12.

- Recherche du plus petit entier n tel que $0,8^n \leq 0,01$:

$$0,8^n \leq 0,01 \Leftrightarrow \ln(0,8^n) \leq \ln(0,01) \Leftrightarrow n \ln 0,8 \leq \ln 0,01 \Leftrightarrow n \geq \frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \text{ (car } \ln 0,8 < 0 \text{)}.$$

Or $\frac{\ln 0,01}{\ln 0,8} \approx 20,64$. Le plus petit entier qui convient est donc 21.

8) Équations différentielles

a) Équations différentielles de la forme $y' + ay = b$

- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k e^{-ax}$.
- Les solutions de l'équation différentielle $y' + ay = b$ sont les fonctions f définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a}$.

► *Exemple :* Résolution de $y' + 4y = 8$ ($a = 4 ; b = 8$)

- Les solutions sont définies par $f(x) = k e^{-ax} + \frac{b}{a} = k e^{-4x} + \frac{8}{4} = k e^{-4x} + 2$.

- Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = 1$:

Cela revient à déterminer k tel que $f(0) = 1 \Leftrightarrow k e^0 + 2 = 1 \Leftrightarrow k = -1$.

La solution particulière cherchée est donc définie par $f(x) = -e^{-4x} + 2$.

b) Équations différentielles de la forme $y'' + \omega^2 y = 0$

Les solutions de l'équation différentielle $y'' + \omega^2 y = 0$ sont les fonctions f définies par $f(x) = A \cos(\omega x) + B \sin(\omega x)$.

► *Exemple* : Résolution de $y'' + 4y = 0$ (on a $\omega^2 = 4$: on peut prendre $\omega = 2$)

• Les solutions sont définies par $f(x) = A \cos(2x) + B \sin(2x)$.

• Recherche de la solution particulière telle que $f(0) = \sqrt{3}$ et $f'(0) = 2$:

$$f(0) = \sqrt{3} \Leftrightarrow A \cos 0 + B \sin 0 = \sqrt{3} \Leftrightarrow A = \sqrt{3}.$$

Pour tout x , on a $f'(x) = -2A \sin(2x) + 2B \cos(2x)$.

$$f'(0) = 2 \Leftrightarrow -2A \sin 0 + 2B \cos 0 = 2 \Leftrightarrow 2B = 2 \Leftrightarrow B = 1.$$

La solution cherchée est définie par $f(x) = \sqrt{3} \cos(2x) + \sin(2x)$.

9) Probabilités

a) Loi binomiale

DÉFINITION

- On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
- On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.

► *Exemple* : Lancer un dé avec pour issues contraires « obtenir un 6 » et « ne pas obtenir un 6 » est une *épreuve* de Bernoulli. Lancer notre dé 10 fois est un *schéma* de Bernoulli (on répète l'épreuve de Bernoulli).

Par contre, si on s'intéresse ensemble aux six événements « obtenir le chiffre n » ($1 \leq n \leq 6$), ce n'est plus une épreuve de Bernoulli.

► Remarques :

• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et \bar{S} . La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de \bar{S} est alors $(1 - p)$).

PROPRIÉTÉ

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve. Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S , la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n, p)$.

• **Probabilité de n'obtenir que des succès** : $p(X = n) = p^n$

• **Probabilité de n'obtenir aucun succès** : $p(X = 0) = (1 - p)^n$

• **Probabilité d'obtenir k succès** : $p(X = k) = \binom{n}{k} p^k (1 - p)^{n-k}$

(k entier tel que : $0 \leq k \leq n$)

• **Probabilité d'obtenir au moins un succès** = $1 - (\text{probabilité de n'obtenir aucun succès})$

• **Espérance de X** : $E(X) = np$

• **Variance de X** : $V(X) = np(1 - p)$

• **Écart-type de X** : $\sigma(X) = \sqrt{np(1 - p)}$

Obtention du coefficient binomial $\binom{n}{k}$ à la calculatrice :

CASIO : n [OPTN] [PROB] [nCr] k ; TI : n [MATH] [PROB] [3:Combinaison] k

► Exemple :

Si on lance 7 fois de suite un dé et si on note X le nombre de 6 obtenus, on répète 7 fois l'épreuve de Bernoulli : « obtenir un 6 (probabilité : $\frac{1}{6}$) - ne pas obtenir un 6 ».

X suit donc la loi binomiale de paramètres $n = 7$ et $p = \frac{1}{6}$.

La probabilité d'obtenir exactement trois fois un « 6 » est égale à : $\binom{7}{3} \left(\frac{1}{6}\right)^3 \left(\frac{5}{6}\right)^4$.

La probabilité de n'obtenir que des « 6 » est égale à : $\left(\frac{1}{6}\right)^7$

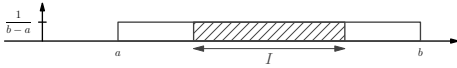
La probabilité de n'obtenir aucun « 6 » est égale à : $\left(\frac{5}{6}\right)^7$

L'espérance de X (nombre moyen de « 6 » que l'on peut espérer obtenir en répétant un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est égale à $np = \frac{7}{6}$.

b) Loi uniforme

DÉFINITION

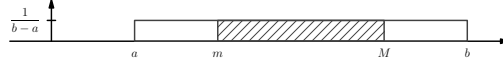
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[a; b]$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire du rectangle de base I et de hauteur $\frac{1}{b-a}$.



PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ alors pour tous réels m et M inclus dans $[a; b]$, les probabilités suivantes sont égales à l'aire du rectangle correspondant :

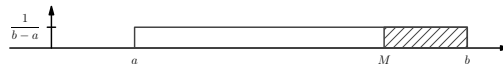
$$p(m \leq X \leq M)$$



$$p(X \leq m) = p(a \leq X \leq m)$$



$$p(X \geq M) = p(M \leq X \leq b)$$



$$p(X = m) = 0$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

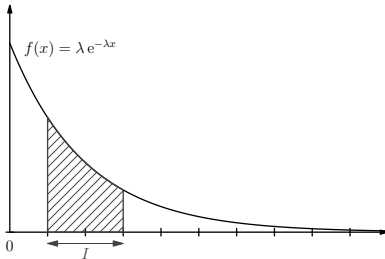
• Si une variable aléatoire X suit la **loi uniforme** sur $[a; b]$ alors :

l'espérance de X est égale à $\frac{a+b}{2}$. La variance est égale à $\frac{(b-a)^2}{12}$.

c) Loi exponentielle

DÉFINITION

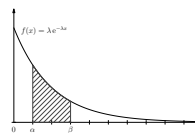
On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ lorsque pour tout intervalle I , inclus dans $[0; +\infty[$, la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f définie par $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$



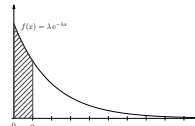
PROPRIÉTÉ

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ alors pour tous réels α et β inclus dans $[0; +\infty[$, on a :

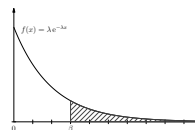
$$p(\alpha \leq X \leq \beta) = \int_{\alpha}^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_{\alpha}^{\beta}$$



$$p(X \leq \alpha) = p(0 \leq X \leq \alpha) = \int_0^{\alpha} \lambda e^{-\lambda x} dx = [-e^{-\lambda x}]_0^{\alpha}$$



$$p(X \geq \beta) = 1 - p(0 \leq X \leq \beta) = 1 - \int_0^{\beta} \lambda e^{-\lambda x} dx = 1 - [-e^{-\lambda x}]_0^{\beta}$$



(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

• Si une variable aléatoire X suit la **loi exponentielle de paramètre λ** sur $[0; +\infty[$ alors l'espérance de X est égale à $\frac{1}{\lambda}$.

► *Exemple* : La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0, +\infty[$.

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$$p(X < 1000) = \int_0^{1000} 0,0006e^{-0,0006x} dx = [-e^{-0,0006x}]_0^{1000} = 1 - e^{-0,6}.$$

La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

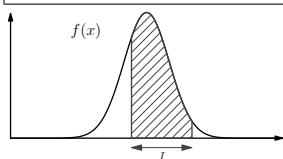
$$p(X > 500) = 1 - \int_0^{500} 0,0006e^{-0,0006x} dx = 1 - [-e^{-0,0006x}]_0^{500} = e^{-0,3}.$$

d) Loi normale

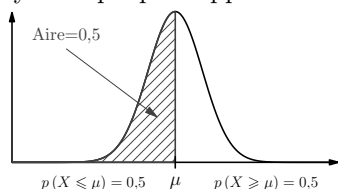
DÉFINITION

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** lorsque pour tout intervalle I la probabilité de l'événement « X appartient à I » est égale à l'aire sous la courbe sur I de la fonction f

définie par $f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-0,5\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}$.



► **Remarque** : L'aire totale sous la courbe est égale à 1 (on dit que f est une densité de probabilité) et la courbe est symétrique par rapport à l'espérance μ . On a donc la situation suivante :



PROPRIÉTÉ

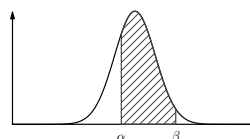
• Si une variable aléatoire X suit la **loi normale d'espérance μ et d'écart-type σ** alors pour tous réels α et β , on a :

$$p(\alpha \leq X \leq \beta) =$$

TI : **DISTR (2nd+VARS)** **normalcdf** ($\alpha, \beta, \mu, \sigma$)

CASIO : **Menu STAT** **DIST** **NORM** **NCD** avec

Lower : α ; Upper : β ; σ : σ ; μ : μ

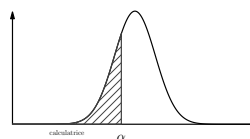


$$p(X \leq \alpha) =$$

TI : **normalcdf** ($-10^{99}, \alpha, \mu, \sigma$)

CASIO : **NCD** avec

Lower : -10^{99} ; Upper : α ; σ : σ ; μ : μ

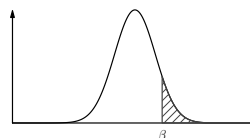


$$p(X \geq \beta) =$$

TI : **normalcdf** ($\beta, 10^{99}, \mu, \sigma$)

CASIO : **NCD** avec

Lower : β ; Upper : 10^{99} ; σ : σ ; μ : μ



• **Valeurs remarquables** :

$$p(\mu - \sigma < X < \mu + \sigma) = 0,68 \quad ; \quad p(\mu - 2\sigma < X < \mu + 2\sigma) = 0,95 \quad ; \quad p(\mu - 3\sigma < X < \mu + 3\sigma) = 0,997$$

► *Exemple 1* : (pour tester sa calculatrice)

Si X suit la loi normale d'espérance $\mu = 58$ et d'écart-type $\sigma = 6$, on doit avoir :

$$p(52 \leq X \leq 64) \approx 0,682689 \quad ; \quad p(X \leq 55) \approx 0,308538 \quad ; \quad p(X \geq 62) \approx 0,252493$$

► *Exemple 2* : Le diamètre X des barres métalliques sortant d'un atelier suit la loi normale d'espérance 12 mm (le diamètre attendu) et d'écart-type 0,08 mm. Un client refuse d'acheter des tubes dont le diamètre ne serait pas compris entre 11,9 mm et 12,2 mm. On cherche à déterminer le pourcentage de tubes acceptés par le client.

$p(11,9 \leq X \leq 12,2) \approx 0,888$, donc 88,8% des tubes sont acceptés par le client.

► *Exemple 3:* Une variable aléatoire suivant une loi normale est telle que $p(X < 2) = 0,067$ et $p(X < 3) = 0,159$. On peut en déduire que $p(X > 2) = 1 - p(X \leq 2) = 0,933$ et $p(2 < X < 3) = p(X < 3) - p(X < 2) = 0,092$.

10) Échantillonnage

a) Intervalle de fluctuation à 95%

PROPRIÉTÉ

Étant donné une population dans laquelle la proportion connue d'un certain caractère est p . Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population alors il y a 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion f du caractère au sein de cet échantillon appartienne à l'intervalle :

$$\left[p - 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} ; p + 1,96\sqrt{\frac{p(1-p)}{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de fluctuation à 95%** de l'échantillon associé à la proportion p .

b) Prise de décision à partir d'un intervalle de fluctuation

PROPRIÉTÉ

Étant donné une population dans laquelle **on suppose que la proportion d'un certain caractère est p** . Si on prélève, avec remise, un échantillon de taille n dans cette population et si la **fréquence réelle observée f** du caractère dans cet échantillon **est comprise dans l'intervalle de fluctuation** alors on dit qu'**on accepte au seuil de 95% l'hypothèse que la proportion réelle du caractère dans la population est bien p** (dans le cas contraire, on dit qu'on rejette l'hypothèse).

► *Exemple :* Un candidat pense que 52% des électeurs lui sont favorables. On prélève avec remise un échantillon de 500 électeurs : 47% des électeurs interrogés de cet échantillon se déclarent favorable au candidat en question. L'intervalle de fluctuation de l'échantillon associé à la proportion de 52% est $[0,476 ; 0,564]$ car :

$$0,52 - 1,96\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,476 \text{ et } 0,52 + 1,96\sqrt{\frac{0,52 \times 0,48}{500}} \approx 0,564.$$

0,47 étant en dehors de l'intervalle de fluctuation, on peut rejeter au seuil de 95% l'hypothèse du candidat selon laquelle 52% des électeurs lui sont favorables.

c) Estimation par un intervalle de confiance

PROPRIÉTÉ

On cherche à connaître une estimation de la proportion p inconnue d'un certain caractère au sein d'une population. Pour cela, on prélève avec remise un échantillon de taille n au sein de la population et on note f la proportion observée du caractère au sein de l'échantillon. Il y a alors 95% de chance (dans certaines conditions) que la proportion p du caractère au sein de la population totale soit comprise dans l'intervalle :

$$\left[f - 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} ; f + 1,96\sqrt{\frac{f(1-f)}{n}} \right]$$

Cet intervalle est appelé **intervalle de confiance à 95%** associé à la proportion f .

► *Exemple :* Un sondage réalisé sur un échantillon de 1000 personnes attribue à un candidat un score de 18%. L'intervalle de confiance à 95% associé à cette proportion observée de 18% dans l'échantillon est $[15,6\% ; 20,3\%]$ car :

$$0,18 - 1,96\sqrt{\frac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,156 \text{ et } 0,18 + 1,96\sqrt{\frac{0,18 \times 0,82}{1000}} \approx 0,203.$$