Kit de survie : Terminale S

1) Inégalités - Étude du signe d'une expression

a) Opérations sur les inégalités

Règles usuelles :

Pour tout a :	$x<y \Leftrightarrow x+a<y+a$	*même sens*
Pour tout $k>0$:	$x<y \Rightarrow kx<ky$	*même sens*
Pour tout $k<0$:	$x<y \Rightarrow kx>ky$	*sens contraire*
Pour x et y de même signe :	$x<y \Rightarrow \dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}$	*sens contraire*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow x^2<y^2$	*même sens*
Pour $x>0$ et $y>0$:	$x<y \Rightarrow \sqrt{x}<\sqrt{y}$	*même sens*
Si f croissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)<f(y)$	*même sens*
Si f décroissante * :	$x<y \Rightarrow f(x)>f(y)$	*sens contraire*

(* sur un intervalle contenant x et y)

▶ *Exemples :*

• Sachant que $3<x<5$, que peut-on en conclure pour $\dfrac{1}{3-x}$?

$3<x<5 \Rightarrow -5<-x<-3 \Rightarrow -2<3-x<0 \Rightarrow \dfrac{1}{3-x}<-\dfrac{1}{2}$

• Comment montrer que pour tout $x>1$, $\dfrac{1}{x}<\dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}$?

Pour tout $x>1$:

$0<x^2-1<x^2 \Rightarrow \sqrt{x^2-1}<\sqrt{x^2} \Rightarrow \sqrt{x^2-1}<x$ (car $x>0$) $\Rightarrow \dfrac{1}{\sqrt{x^2-1}}>\dfrac{1}{x}$

Rappels :

• On peut toujours **ajouter** membre à membre deux inégalités.

• On peut **multiplier** membre à membre deux inégalités si tous les termes sont **positifs**.

• On ne peut pas soustraire ou diviser membre à membre deux inégalités.

Encadrement de $x-y$:

• On détermine d'abord un encadrement de $-y$, puis on effectue la somme membre à membre avec celui de x.

▶ *Exemple :* $\begin{cases} -2<x<3 \\ -4<y<-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -2<x<3 \\ 1<-y<4 \end{cases} \Rightarrow -1<x-y<7.$

Encadrement de $\dfrac{x}{y}$: (les bornes de l'encadrement de x étant de même signe - idem pour y)

• On détermine d'abord un encadrement de $\dfrac{1}{y}$, puis il faut s'arranger pour multiplier membre à membre deux encadrements dont tous les termes sont **positifs**.

▶ *Exemple 1 :* $\begin{cases} 8<x<9 \\ 3<y<4 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 8<x<9 \\ \dfrac{1}{4}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{3} \end{cases} \Rightarrow 2<\dfrac{x}{y}<3.$

▶ *Exemple 2 :* $\begin{cases} -2<x<-1 \\ 2<y<3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1<-x<2 \\ \dfrac{1}{3}<\dfrac{1}{y}<\dfrac{1}{2} \end{cases}$

$\Rightarrow \dfrac{1}{3}<\dfrac{-x}{y}<1 \Rightarrow -1<\dfrac{x}{y}<-\dfrac{1}{3}.$

Méthode importante à connaître : (valable pour les fonctions et les suites)

• Pour montrer que $A<B$, il est dans certains cas plus facile de calculer $A-B$, puis en étudiant son signe de montrer que $A-B<0$.

▶ *Exemple :* Comment montrer que si $x<1$ alors $\dfrac{x-8}{2x-9}<1$?

Pour tout $x<1$, $\dfrac{x-8}{2x-9}-1=\dfrac{\overbrace{(1-x)}^{+}}{\underbrace{(2x-9)}_{-}}<0$ (car $\begin{cases} 1-x>0 \\ 2x-9<-7 \end{cases}$)

b) Inégalités classiques

Pour tout x : $-1 \leqslant \cos x \leqslant 1$ et $-1 \leqslant \sin x \leqslant 1$.

c) Signe de $ax+b$ $(a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax+b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-\dfrac{b}{a}$		$+\infty$
$ax+b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

d) Signe de $ax^2 + bx + c \quad (a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)
• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$ $\qquad$ $+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$	x_1	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de a

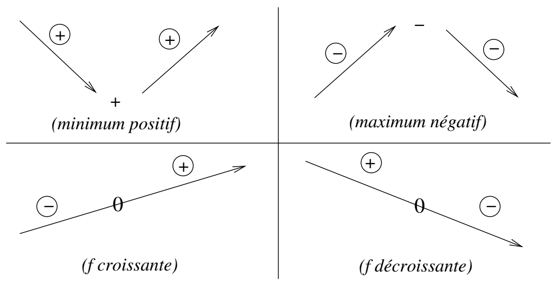
• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$	x_1		x_2	$+\infty$
ax^2+bx+c	signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a

(on suppose que $x_1 < x_2$)

e) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



2) Étude de fonction

a) Parité - Périodicité

• f est paire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• f est impaire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.
• une fonction f définie sur $\mathbb{R}$ est périodique de période T si $f(x+T) = f(x)$ pour tout x. La courbe dans un repère orthogonal est invariante par la translation de vecteur $T\vec{i}$.

b) Axe et centre de symétrie

• C_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $f(a+h) = f(a-h)$.
• C_f admet le point $\Omega\,(a,b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $\dfrac{f(a+h)+f(a-h)}{2} = b$.

c) Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l + l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l \times l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$	

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :
Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » : $\dfrac{(\ \ )}{(\ \ )} = (\ \ \ ) \times \dfrac{1}{(\ \ )}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré.
• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

d) Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x\to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est une asymptote verticale à C_f.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) = b$ alors la droite d'équation $y = b$ est une asymptote horizontale à C_f en $\pm\infty$.
• Si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - (ax+b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.
• Si $f(x) = ax+b+g(x)$ avec $\lim\limits_{x\to\pm\infty} g(x) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax+b$ est une asymptote oblique à C_f en $\pm\infty$.
• De façon générale, si $\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes.

• Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales et obliques) :
- si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
- si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

e) Dérivation

• Dérivabilité :

• f est dérivable en a si $\lim\limits_{x\to a} \dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est égale à un réel.
• si la limite n'existe que pour $x > a$, f n'est dérivable qu'à droite.
• si la limite n'existe que pour $x < a$, f n'est dérivable qu'à gauche.

• Dérivées des fonctions usuelles :

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax+b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• Opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f+g$	$f'+g'$
$k\,f$ (k réel)	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	Fonction dérivée
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

f) Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x-a)$
(le coefficient directeur de la tangente est égale à la valeur de la dérivée)
• Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = mx+p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$. (les coefficients directeurs devant être égaux)

g) Continuité

• f est continue en un point a d'un intervalle $I \subset D_f$ si f admet une limite en a et si $\lim\limits_{x \to a} = f(a)$.
• Si f est dérivable en a alors f est continue en a.

h) Théorème de la valeur intermédiaire - Équation $f(x) = k$

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si k est compris entre les valeurs de f aux bornes de I alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I.
• Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du « balayage ».

▶ *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x^3 + x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1, 2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0$ sur I.
De plus 5 est compris entre $f(1) = 2$ et $f(2) = 10$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 5$ admet une unique solution x_0 dans $[1, 2]$.
Recherche une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près :

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	2	2,43	2,93	3,50	4,14	**4,87**	**5,70**				

On a arrêté les calculs après 1,6 car $f(1,5) < 5 < f(1,6)$. On peut donc en déduire que : $1,5 < x_0 < 1,6$. Une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près est 1,5 et une valeur approchée de x_0 **par excès** à 10^{-1} près est 1,6.

3) Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$	
$f(x) = \sin x \Rightarrow F(x) = -\cos x$	$f(x) = \cos x \Rightarrow F(x) = \sin x$

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$U'U^3$	$\dfrac{U^4}{4}$	$f(x) = 2x(x^2+1)^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^2+1)^4}{4}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x) = \dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ $(U(x) > 0)$	$2\sqrt{U}$	$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{3x+2}$
$U'\sin U$	$-\cos U$	$f(x) = 2x\sin(x^2+1) \Rightarrow F(x) = -\cos(x^2+1)$
$U'\cos U$	$\sin U$	$f(x) = 4\cos(4x+5) \Rightarrow F(x) = \sin(4x+5)$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

▶ *Exemple :* Soit f définie sur $]-2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{(3x+6)^2}$.

On pense à la forme $\dfrac{U'}{U^2}$ (dont une primitive est $\dfrac{-1}{U}$) . On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{\dfrac{3}{(3x+6)^2}}_{\text{forme exacte}}$.

Une primitive de f sur $]-2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3} \times \dfrac{-1}{(3x+6)}$.

4) Fonctions logarithme népérien et exponentielle

a) Existence

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$.
• e^x existe pour tout réel x.

▶ *Exemple :*
La fonction f définie par $f(x) = \ln\left(x^2 - 1\right)$ n'est définie que sur $]-\infty\,;\,-1[\cup]1\,;\,+\infty[$ car il faut que $x^2 - 1$ soit strictement positif.

b) Lien entre $\ln x$ et e^x

• $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$
• $\ln\left(e^x\right) = x \quad ; \quad e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

c) Valeurs particulières

• $\ln 1 = 0 \quad ; \quad \ln e = 1$
• $e^0 = 1 \quad ; \quad e^1 = e \quad ; \quad e^{-1} = \dfrac{1}{e}$

d) Propriétés algébriques

Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b \quad ; \quad \ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a \quad ; \quad \ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\ln\left(a^n\right) = n\ln a \quad ; \quad \ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

Pour tous réels a et b :
$e^a \times e^b = e^{a+b} \quad ; \quad \dfrac{1}{e^a} = e^{-a} \quad ; \quad \dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$
Pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\left(e^a\right)^n = e^{an}$

▶ *Exemples :*
Si $x > 0$, $\ln\left(\dfrac{1}{x^2}\right) = -\ln(x^2) = -2\ln x$
Pour tout x, $\left(e^{-x}\right)^2 \times e^{3x} = e^{-2x} \times e^{3x} = e^x$

e) Signe de $\ln x$ et de e^x

• Signe de $\ln x$:
Si $0 < x < 1$ alors $\ln x$ est strictement négatif.
Si $x > 1$ alors $\ln x$ est strictement positif.
$\ln 1 = 0$.

• Signe de e^x : pour tout réel x, e^x est strictement positif.

f) Équations et inéquations

• Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad \ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b \quad ; \quad \ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$
• $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b \quad ; \quad e^a < e^b \Leftrightarrow a < b \quad ; \quad e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$
• $\ln x = a \Leftrightarrow x = e^a \quad ; \quad \ln x < a \Leftrightarrow 0 < x < e^a \quad ; \quad \ln x > a \Leftrightarrow x > e^a$
• Si $a > 0$: $e^x = a \Leftrightarrow x = \ln a \quad ; \quad e^x < a \Leftrightarrow x < \ln a \quad ; \quad e^x > a \Leftrightarrow x > \ln a$

▶ *Remarque :*
Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition :
$\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $\quad S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition :
$\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $\quad S =]-2; e-2]$

• $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.
$\Delta = 16 \;;\quad X = -1$ ou $X = 3$.
D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $\quad S = \{\ln 3\}$

• $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$.
$S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

g) Limites

Situation en $+\infty$:
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^n} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\ln x} = +\infty$
(on dit que x^n est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x^n} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{\mathrm{e}^x} = 0$
(on dit que e^x est plus fort que x^n en $+\infty$: on en déduit que e^x est aussi plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI en $+\infty$: Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.
▶ *Exemples :*
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x - x = \lim\limits_{x\to+\infty} x\left(\dfrac{\ln x}{x} - 1\right) = -\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} x = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} 3\mathrm{e}^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(3 - \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{\mathrm{e}^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$
• $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x + \ln x}{x+1} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{(1 + \frac{\ln x}{\mathrm{e}^x})}{(1+\frac{1}{x})} = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{\mathrm{e}^x} = 0$ (le plus fort est en bas)

Situation en 0 :
• $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$
• Pour tout entier $n>0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^n \times \ln x = 0$

Méthode générale en cas de FI en 0 avec un logarithme : on essaie de faire apparaître $x^n \times \ln x$.
▶ *Exemple :*
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} + \ln x = \lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty$ car $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \dfrac{1}{x} = +\infty$ et $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$

Situation en $-\infty$:
• $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$
• $\lim\limits_{x\to-\infty} x^n \times \mathrm{e}^x = 0$

Méthode générale en cas de FI en $-\infty$ avec un exponentiel : on essaie de faire apparaître $x^n \times e^x$.
▶ *Exemple :* $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2\mathrm{e}^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$

• Autres limites : $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\ln(1+x)}{x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x} = 1$

h) Dérivées et primitives

• $(\ln x)' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)' = \dfrac{u'}{u}$ $(u>0)$
• $(\mathrm{e}^x)' = \mathrm{e}^x$; $(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$

▶ *Exemples :*
$\left[\ln(x^2+1)\right]' = \dfrac{2x}{x^2+1}$; $\left[\mathrm{e}^{-x}\right]' = -\mathrm{e}^{-x}$

• Si $U>0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln U$.
• Si $U<0$, une primitive de $\dfrac{U'}{U}$ est $\ln(-U)$.
• Une primitive de $u'\mathrm{e}^U$ est e^U.

▶ *Exemples :*
• Soit f définie sur $]2\,;\,+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{1}{4x-8}$. On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{4} \times \underbrace{\dfrac{4}{4x-8}}_{\text{forme exacte}}$.
Une primitive de f sur $]2\,;\,+\infty[$ est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}\ln(4x-8)$ car $4x-8$ reste strictement positif sur $]2\,;\,+\infty[$.
• Si $f(x) = e^{-x} = -\left(-e^{-x}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = -e^{-x}$.
• Si $f(x) = e^{4x+5} = \dfrac{1}{4}\left(4e^{4x+5}\right)$ alors une primitive de f est définie par $F(x) = \dfrac{1}{4}e^{4x+5}$.

5) Suites numériques

a) Raisonnement par récurrence

Principe général : Pour montrer qu'une propriété dépendant d'un entier n est vraie pour tout $n \geqslant n_0$:
• on vérifie que la propriété est vraie au rang n_0.
• on suppose la propriété vraie au rang p *(en traduisant ce que cela signifie)* et on montre **qu'alors** la propriété est vraie au rang $p+1$.
• on conclut en disant que la propriété est donc vraie pour tout $n \geqslant n_0$.

▶ *Exemple :*
Montrons par récurrence que la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \sqrt{2+U_n}$ est positive et majorée par 2 :
• $0 \leqslant U_0 \leqslant 2$. La propriété est vraie au rang 0.
• On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 2$.
On a alors : $2 \leqslant 2+U_p \leqslant 4 \Rightarrow \sqrt{2} \leqslant \sqrt{2+U_p} \leqslant 2 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 2$.
La propriété est alors vraie au rang $p+1$, elle est donc vraie pour tout n.

b) Comment étudier le sens de variation d'une suite ?

– **Méthode 1** : on étudie le signe de $U_{n+1} - U_n$.
  • Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ reste toujours positif alors la suite est croissante.
  • Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n$ reste toujours négatif alors la suite est décroissante.
  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = U_n + 2n$.
  Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 2n \geqslant 0$. (U_n) est donc croissante.
– **Méthode 2** (uniquement pour les suites dont tous les termes sont strictement positifs) : on compare $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ à 1.
  • Si pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ reste supérieur à 1 alors la suite est croissante.
  • Si pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n}$ reste inférieur à 1 alors la suite est décroissante.
  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_n = 3^n$.
  Pour tout n, $U_n > 0$ et $\dfrac{U_{n+1}}{U_n} = 3 \geqslant 1$. (U_n) est donc croissante.
– **Méthode 3** (pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$) : on utilise les variations de la fonction f sur $[0\,;+\infty[$.
  • Si f est croissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est croissante.
  • Si f est décroissante sur $[0;+\infty[$ alors la suite est décroissante.
  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_n = \mathrm{e}^{\frac{1}{n+1}}$.
  On a $U_n = f(n)$ avec f définie sur $[0;+\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}}$.
  Pour tout $x \geqslant 0$, $f'(x) = -\frac{1}{(x+1)^2}\mathrm{e}^{\frac{1}{x+1}} < 0$. f est décroissante sur $[0;+\infty[$, donc (U_n) est décroissante.
– **Méthode 4** : à l'aide d'un raisonnement par récurrence
  • Si on montre par récurrence que pour tout n, $U_{n+1} \geqslant U_n$ alors la suite est croissante.
  • Si on montre par récurrence que pour tout n, $U_{n+1} \leqslant U_n$ alors la suite est décroissante.
  ▶ *Exemple* : Soit (U_n) la suite définie par $U_0 = \mathrm{e}$ et $U_{n+1} = \ln(U_n)$.
  Montrons par récurrence que (U_n) est décroissante, c'est à dire que pour tout n, $U_{n+1} \leqslant U_n$: Au rang $n = 0$: $U_1 = 1$. On a bien $U_1 \leqslant U_0$.
  On suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $U_{p+1} \leqslant U_p$. La fonction ln étant croissante sur $]0\,;+\infty[$, on a alors $\ln(U_{p+1}) \leqslant \ln(U_p)$. On en déduit que $U_{p+2} \leqslant U_{p+1}$. La propriété est alors vraie au rang $p+1$, donc elle est vraie pour tout n.

c) Majorant et minorant d'une suite

Une suite (U_n) est majorée par un réel M si, pour tout n, U_n reste inférieur ou égal à M.

Méthodes possibles pour montrer que M est un majorant :
– On peut étudier le signe de $U_n - M$ et montrer que $U_n - M$ est toujours négatif ou nul.
– On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que U_n reste toujours inférieur ou égal à M. *(voir exemple du paragraphe ≪ Raisonnement par récurrence ≫)*
– Pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f. Si, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \leqslant M$ alors (U_n) sera majorée par M.

Une suite (U_n) est minorée par un réel m si, pour tout n, U_n reste supérieur ou égal à m.

Méthodes possibles pour montrer que m est un minorant :
– On peut étudier le signe de $U_n - m$ et montrer que $U_n - m$ est toujours positif ou nul.
– On peut utiliser un raisonnement par récurrence pour démontrer que U_n reste toujours supérieur ou égal à m. *(voir exemple du paragraphe ≪ Raisonnement par récurrence ≫ où l'on montre que la suite est minorée par 0)*
– Pour les suites explicites définies par $U_n = f(n)$, on peut étudier les variations de la fonction f. Si, pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant m$ alors (U_n) sera minorée par m.

d) Limites de suite

• Une suite (U_n) est dite **convergente** s'il existe un **réel** l tel que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.
• La suite est dite **divergente** si elle n'admet pas de limite ou si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \pm\infty$
• Les théorèmes sur les opérations avec les limites de fonction restent valables pour les suites.

Pour les suites définies par $U_n = f(n)$: si f admet une limite en $+\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{x\to+\infty} f(x)$. *(dans la pratique, on peut continuer à utiliser n comme variable)*

► *Exemple :* $\lim\limits_{n\to+\infty} n - \ln n = \lim\limits_{n\to+\infty} n\left(1 - \dfrac{\ln n}{n}\right) = +\infty$, car $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\ln n}{n} = 0$

Limite de q^n :
• si $-1 < q < 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = 0$.
• si $q > 1$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} q^n = +\infty$.
• si $q \leqslant -1$ alors la suite de terme général q^n n'admet pas de limite.

► *Exemples :*
• $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\sqrt{3}\right)^n = +\infty$ car $\sqrt{3} > 1$.
• $\lim\limits_{n\to+\infty} 3\cdot\left(1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right) = 3$ car $-1 < \frac{1}{2} < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 0$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1$.

Théorèmes de comparaison :
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \geqslant V_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = +\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} W_n = -\infty$ alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = -\infty$.
• si pour tout $n \geqslant n_0$, $V_n \leqslant U_n \leqslant W_n$ et si $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = \lim\limits_{n\to+\infty} W_n = l$ (l réel) alors $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l$.

► *Exemple :* Pour tout $n \geqslant 1$, $-\dfrac{1}{n} \leqslant \dfrac{\cos n}{n} \leqslant \dfrac{1}{n}$ et $\lim\limits_{n\to+\infty} -\dfrac{1}{n} = \lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{1}{n} = 0$.
Donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} \dfrac{\cos n}{n} = 0$.

e) Convergence des suites croissantes ou décroissantes

• toute suite croissante et majorée par M converge vers un réel l avec $l \leqslant M$.
• toute suite décroissante et minorée par m converge vers un réel l avec $l \geqslant m$.

Détermination de l dans le cas des suites définies par $U_{n+1} = f(U_n)$:
Si pour tout $x \in [a\,;b]$, $f(x) \in [a\,;b]$; si f est **continue** sur $[a\,;b]$ et si, pour tout n, $U_n \in [a\,;b]$ alors :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(l) \Rightarrow l = f(l)$

f) Suites adjacentes

Définition : Deux suites (U_n) et (V_n) sont dites adjacentes si l'une est croissante, l'autre décroissante et si $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = 0$.
Propriété : Deux suites adjacentes sont convergentes et elles admettent la même limite.

► *Exemple :*
Soit (U_n) et (V_n) les suites définies par $U_n = 1 - \dfrac{1}{n}$ et $V_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^n$ (pour $n \geqslant 1$).
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = 1 - \dfrac{1}{n+1} - 1 + \dfrac{1}{n} = \dfrac{1}{n(n+1)} > 0$. (U_n) est croissante.
Pour tout n, $V_{n+1} - V_n = 1 + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1} - 1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n = \left(\frac{1}{3}\right)^n\left(\frac{1}{3} - 1\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^n < 0$. (V_n) est décroissante. De plus, $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n - V_n = -\dfrac{1}{n} - \left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ (car $-1 < \frac{1}{3} < 1$). Les suites sont adjacentes.

g) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre r appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + r$; $U_n = U_0 + nr$; $U_n = U_p + (n-p)r$
• Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
• Si la raison r est positive, la suite est croissante.
• Si la raison r est négative, la suite est décroissante.

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $r = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10r = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33r = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + nr = 2 + 3n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$.
La suite est strictement croissante car $a > 0$.

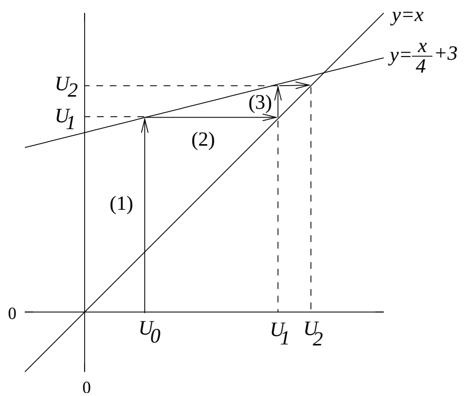
h) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre q appelé raison de la suite.
• Pour tout n : $U_{n+1} = q \times U_n$; $U_n = q^n \times U_0$; $U_n = q^{n-p} \times U_p$
• Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n}$ = constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
• $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1-q^{n-p+1}}{1-q} = 1\text{er terme} \times \dfrac{1-q^{\text{nb de termes}}}{1-q}$ (pour $q \neq 1$)
• Pour étudier le sens de variation, on calcule $U_{n+1} - U_n$ et on factorise.
(remarque : si $q < 0$ la suite est ni croissante, ni décroissante)

► *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $q = 2$.
$U_4 = q^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = q^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = q^n \times U_0 = 5 \times 2^n$. $U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$.
$U_{n+1} - U_n = 5 \times 2^{n+1} - 5 \times 2^n = 5 \times 2^n \times (2-1) = 5 \times 2^n > 0$. La suite est croissante.

i) Exemple de suite récurrente définie par $U_{n+1} = f(U_n)$

Soit (U_n), la suite définie par $U_0 = 1$ et $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{4} + 3$.
a) Représenter graphiquement les premiers termes de la suite :



On trace d'abord la représentation graphique de la fonction f définissant la relation de récurrence (ici on a $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$) et la droite d'équation $y = x$.
On part de U_0 en abscisse : l'ordonnée du point de la courbe correspondant à cette abscisse nous donne U_1 [(1) *sur le graphique*] .
Pour déterminer $U_2 = f(U_1)$, il nous faut rabattre U_1 sur l'axe des abscisses [(2) *sur le graphique*] en utilisant la droite d'équation $y = x$.
Dès lors, U_2 est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse U_1 [(3) *sur le graphique*].
Pour poursuivre la construction, on répète le procédé en rabattant U_2 sur l'axe des abscisses...
b) Montrer par récurrence que, pour tout n, $0 \leqslant U_n \leqslant 4$:
au rang 0 : $0 \leqslant U_0 \leqslant 4$.
on suppose la propriété vraie au rang p, c'est à dire que $0 \leqslant U_p \leqslant 4$.
On a alors : $0 \leqslant \dfrac{U_p}{4} \leqslant 1 \Rightarrow 3 \leqslant \dfrac{U_p}{4} + 3 \leqslant 4 \Rightarrow 0 \leqslant U_{p+1} \leqslant 4$.
La propriété est alors vraie au rang $p+1$. Elle est donc vraie pour tout n.
c) Montrer que la suite est croissante et conclure sur sa convergence :
Pour tout n, $U_{n+1} - U_n = \dfrac{U_n}{4} + 3 - U_n = \dfrac{3}{4}(4 - U_n) \geqslant 0$ car $U_n \leqslant 4$. La suite est donc croissante et comme elle est majorée, elle converge.
d) Déterminer la limite de la suite :
La suite converge vers un réel l et la fonction f définie par $f(x) = \dfrac{x}{4} + 3$ est continue sur $[0\,;\,4]$, donc :
$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = l \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} f(U_n) = f(l) \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} U_{n+1} = f(l) \Rightarrow l = f(l) \Rightarrow l = \dfrac{l}{4} + 3 \Rightarrow l = 4$.
On en déduit que $\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 4$.

6) Équations différentielles

• Dire que f est une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ signifie que, pour tout x de I, $f'(x) = a\,f(x)$.
• Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax}$ où k est un réel quelconque.

► *Exemple :*
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = -3\,y$ sont les fonctions définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{-3x}$.

• Dire que f est une solution sur un intervalle I de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$ signifie que, pour tout x de I, $f'(x) = a\,f(x) + b$.
• Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = a\,y + b$ $(a \neq 0)$ sont les fonctions définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{ax} - \dfrac{b}{a}$ où k est un réel quelconque.

► *Exemple :*
Les solutions dans $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle $y' = 2\,y + 3$ sont les fonctions définies par $f(x) = k\,\mathrm{e}^{2x} - \dfrac{3}{2}$.

• Exemples classiques d'équations différentielles se ramenant aux formes précédentes

▶ *Exemple 1 :*

a) Montrer que g définie par $g(x)=2x+\dfrac{1}{2}$ est une solution de l'équation différentielle (E) : $y'+2y=4x+3$.

Pour tout x, $g'(x)+2g(x)=2+4x+1=4x+3$. g est bien une solution de (E).

b) Montrer que dire que f est une solution de (E) équivaut à dire que $(f-g)$ est une solution de l'équation différentielle (E') : $y'+2y=0$.

$(f-g)$ est une solution de (E')
$\Leftrightarrow (f-g)'(x)+2(f-g)(x)=0$ (pour tout x)
$\Leftrightarrow f'(x)+2f(x)=g'(x)+2g(x)=4x+3$ (pour tout x) car g est une solution de (E)
$\Leftrightarrow f$ solution de (E)

c) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Les solutions de (E') sont définies par $h(x)=k\mathrm{e}^{-2x}$.
f solution de $(E) \Leftrightarrow (f-g)(x)=k\mathrm{e}^{-2x}$ (pour tout x).
Donc, les solutions de (E) sont définies par $f(x)=k\mathrm{e}^{-2x}+g(x)=k\mathrm{e}^{-2x}+2x+\dfrac{1}{2}$.

▶ *Exemple 2 :*

a) Montrer que dire que f est une solution de (E) : $y'+2y=y^2$ à valeurs strictement positives équivaut à dire que $\dfrac{1}{f}$ est une solution de (E') : $y'=2y-1$.

$\dfrac{1}{f}$ solution de $(E') \Leftrightarrow \left(\dfrac{1}{f}\right)'=2\left(\dfrac{1}{f}\right)-1 \Leftrightarrow -\dfrac{f'}{f^2}=\dfrac{2}{f}-1$
$\Leftrightarrow -f'=2f-f^2 \Leftrightarrow f'+2f=f^2 \Leftrightarrow f$ solution de (E).

b) Résoudre (E') et en déduire les solutions de (E).

Les solutions de (E') sont définies par $h(x)=k\mathrm{e}^{2x}+\dfrac{1}{2}$.

Donc, les solutions de (E) sont définies par $f(x)=\dfrac{1}{k\mathrm{e}^{2x}+\frac{1}{2}}$.

7) Complexes

a) Forme algébrique - Calculs dans $\mathbb{C}$

• Tout complexe s'écrit de façon unique sous la forme algébrique $z=a+ib$ (a et b réels) avec $i^2=-1$.
• a est la partie réelle (notation : $Re(z)$) et b est la partie imaginaire (notation : $Im(z)$).
• $\begin{cases} a+ib=a'+ib' \\ a,\ b\,,a'\,,b' \text{ réels}\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} a=a' \\ b=b'\end{cases}$
• Le conjugué de z est $\overline{z}=a-ib$.
• Pour écrire un quotient de complexes sous forme algébrique, on multiplie en haut et en bas par le conjugué du dénominateur (s'il n'est pas réel).
• $\overline{z+z'}=\overline{z}+\overline{z'}$; $\overline{z\cdot z'}=\overline{z}\cdot\overline{z'}$; $\overline{\left(\dfrac{z}{z'}\right)}=\dfrac{\overline{z}}{\overline{z'}}$ $(z'\neq 0)$.

▶ *Exemples :*

• $\dfrac{2+i}{3+2i}=\dfrac{(2+i)(3-2i)}{(3+2i)(3-2i)}=\dfrac{6-4i+3i-2i^2}{3^2+2^2}=\dfrac{8-i}{13}$

• Résolution de l'équation $\dfrac{1+iz}{z}=-1+3i$:

Pour $z\neq 0$, on obtient : $1+iz=(-1+3i)z \Leftrightarrow 1=(-1+2i)z \Leftrightarrow z=\dfrac{1}{-1+2i}=\dfrac{-1-2i}{1^2+2^2}=\dfrac{-1-2i}{5}$.

• Résolution de l'équation $(1+i)z=\overline{z}-2+3i$:
En posant $z=x+iy$ (x et y réels), on a :
$(1+i)(x+iy)=x-iy-2+3i \Leftrightarrow (x-y)+i(x+y)=(x-2)+i(-y+3) \Leftrightarrow$
$\begin{cases} x-y=x-2 \\ x+y=-y+3\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x=-1 \\ y=2\end{cases}$
D'où, $z=-1+2i$.

Résolution de $az^2+bz+c=0$ (a, b et c réels) : $\Delta=b^2-4ac$
• Si $\Delta>0$, deux solutions réelles : $z_1=\dfrac{-b-\sqrt{\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a}$.
• Si $\Delta=0$, une solution réelle double : $z_1=-\dfrac{b}{2a}$.
• Si $\Delta<0$, 2 solutions complexes : $z_1=\dfrac{-b-i\sqrt{-\Delta}}{2a}$ et $z_2=\dfrac{-b+i\sqrt{-\Delta}}{2a}$.

▶ *Exemple :* $z^2+z+1=0$

$\Delta=-3=\left(\sqrt{3}i\right)^2$. Deux solutions : $z_1=\dfrac{-1-i\sqrt{3}}{2}$ et $z_2=\dfrac{-1+i\sqrt{3}}{2}$.

▶ *Remarque :* On factorise les polynômes dans $\mathbb{C}$ comme dans $\mathbb{R}$.

b) Forme trigonométrique - Module et arguments

Pour $z=a+ib$ (a et b réels) :
• Le module de z est : $|z|=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{z\bar{z}}$.
• Si $z\neq 0$, tout réel θ tel que $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{a}{|z|}\\ \sin\theta=\dfrac{b}{|z|}\end{cases}$ est un argument de z. On note
$arg\ z=\theta+2k\pi$ $(k\in\mathbb{Z})$

• Pour tout θ, on pose $e^{i\theta}=\cos\theta+i\sin\theta$.
$|e^{i\theta}|=1$; $\overline{(e^{i\theta})}=e^{-i\theta}$; $e^{i(\theta+2k\pi)}=e^{i\theta}$
$e^{i\theta}\times e^{i\theta'}=e^{i(\theta+\theta')}$; $\dfrac{1}{e^{i\theta}}=e^{-i\theta}$; $\dfrac{e^{i\theta}}{e^{i\theta'}}=e^{i(\theta-\theta')}$; $\left(e^{i\theta}\right)^n=e^{in\theta}$
• Si un complexe non nul admet r comme module et θ comme argument alors $z=r\cdot e^{i\theta}$ (forme trigonométrique ou forme exponentielle)
• Si $z=r\cdot e^{i\theta}$ avec $r>0$ alors $|z|=r$ et $arg\ z=\theta+2k\pi$.
• $r\cdot e^{i\theta}=r'\cdot e^{i\theta'}$ (avec $r>0$ et $r'>0$) $\Leftrightarrow r=r'$ et $\theta=\theta'+2k\pi$.

▶ *Exemple de passage de la forme algébrique à la forme trigonométrique :*

Soit $z=\sqrt{3}+i$. $|z|=\sqrt{(\sqrt{3})^2+1^2}=2$. $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\\ \sin\theta=\dfrac{1}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=\dfrac{\pi}{6}$. D'où $z=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.

▶ *Exemple de passage de la forme trigonométrique à la forme algébrique :*

$z=4e^{i\frac{\pi}{4}}=4\left(\cos\left(\dfrac{\pi}{4}\right)+i\sin\left(\dfrac{\pi}{4}\right)\right)=4\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}+i\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)=2\sqrt{2}+i2\sqrt{2}$.

▶ *Autres exemples classiques d'utilisation de la forme trigonométrique :*

• Calcul de $(1-i)^{12}$. Il est hors de question de faire le calcul sous forme algébrique.
On détermine d'abord la forme trigonométrique de $z=1-i$:

$|z|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$. $\begin{cases}\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\\ \sin\theta=-\dfrac{1}{\sqrt{2}}=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}\end{cases}\Rightarrow\theta=-\dfrac{\pi}{4}$. D'où $z=\sqrt{2}\cdot e^{-i\frac{\pi}{4}}$.

Ainsi, $(1-i)^{12}=z^{12}=\left(\sqrt{2}\right)^{12}\cdot e^{-i\frac{12\pi}{4}}=64\cdot e^{-i3\pi}=64\left(\cos(-3\pi)+i\sin(-3\pi)\right)=-64$

• Soit $z_1=\sqrt{2}+i\sqrt{2}$ et $z_2=\sqrt{3}+i$.
Calculer la forme trigonométrique de z_1, z_2 et $\dfrac{z_1}{z_2}$. En déduire la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)$.
Réponse : En calculant le module et un argument de z_1 et z_2, on montre que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{4}}$ et que $z_1=2e^{i\frac{\pi}{6}}$.
On en déduit que $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{2e^{i\frac{\pi}{4}}}{2e^{i\frac{\pi}{6}}}=e^{i\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{6}\right)}=e^{i\frac{\pi}{12}}$.
Ainsi $\dfrac{\pi}{12}$ est un argument de $\dfrac{z_1}{z_2}$. Or, $\dfrac{z_1}{z_2}=\dfrac{\sqrt{2}+i\sqrt{2}}{\sqrt{3}+i}=\dfrac{\left(\sqrt{2}+i\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{3}-i\right)}{4}=\dfrac{\left(\sqrt{6}+\sqrt{2}\right)+i\left(\sqrt{6}-\sqrt{2}\right)}{4}$.

Donc, $\cos\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{Re\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ et $\sin\left(\dfrac{\pi}{12}\right)=\dfrac{Im\left(\frac{z_1}{z_2}\right)}{\left|\dfrac{z_1}{z_2}\right|}=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

• Résolution de l'équation $z^3=1$:
En posant $z=r\cdot e^{i\theta}$, on doit avoir $r^3\cdot e^{i3\theta}=1\cdot e^{i0}\Leftrightarrow r^3=1$ et $3\theta=2k\pi\Leftrightarrow r=1$ et $\theta=\dfrac{2k\pi}{3}$.
Les trois solutions sont donc :
$1\cdot e^{i0}=1$; $1\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}+i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ et $1\cdot e^{i\frac{2\pi}{3}}=-\dfrac{1}{2}-i\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ (en prenant $k=0$, $k=1$ et $k=2$).

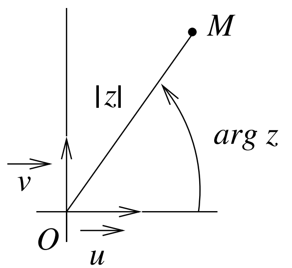
• Formule de Moivre : $(\cos\theta+i\sin\theta)^n=\cos(n\theta)+i\sin(n\theta)$.
En développant le premier membre et en identifiant les parties réelles et imaginaires des deux membres, on obtient $\cos(n\theta)$ et $\sin(n\theta)$ en fonction de $\cos\theta$ et $\sin\theta$.
• Formules d'Euler : $\cos\theta=\dfrac{e^{i\theta}+e^{-i\theta}}{2}$; $\sin\theta=\dfrac{e^{i\theta}-e^{-i\theta}}{2i}$.
Exemple : linéarisation de $\cos^3 x$
$\cos^3 x=\left(\dfrac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}\right)^3=\dfrac{e^{i3x}+e^{-i3x}+3e^{ix}+3e^{-ix}}{8}=\dfrac{2\cos(3x)+6\cos(x)}{8}=\dfrac{1}{4}\cos(3x)+\dfrac{3}{4}\cos(x)$

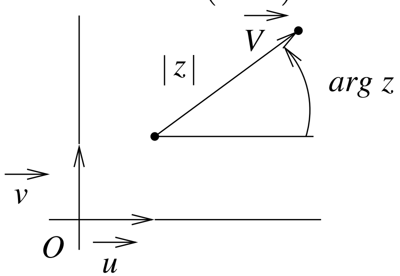
c) Complexes et géométrie

Le plan complexe est muni d'un repère orthonormé direct $(O, \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

• L'affixe du point $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_M = x + iy$.
• L'affixe du milieu I de $[AB]$ est $z_I = \dfrac{z_A + z_B}{2}$.
• L'affixe de G le barycentre de $(A, a)\,(B, b)\,(C, c)$ est :
$z_G = \dfrac{a \cdot z_A + b \cdot z_B + c \cdot z_C}{a + b + c}$ $(a + b + c \neq 0)$.
• L'affixe du vecteur $\overrightarrow{V}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ est $z_{\overrightarrow{V}} = x + iy$.
• $z_{\overrightarrow{AB}} = z_B - z_A$; $z_{\overrightarrow{U}+\overrightarrow{V}} = z_{\overrightarrow{U}} + z_{\overrightarrow{V}}$; $z_{k\overrightarrow{U}} = k \cdot z_{\overrightarrow{U}}$

• Si M est d'affixe z alors $|z| = OM$ et $arg\ z = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{OM}\right)$ $(z \neq 0)$.
• Si $\overrightarrow{V}$ est d'affixe z alors $|z| = \|\overrightarrow{V}\|$ et $arg\ z = \left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{V}\right)$ $(z \neq 0)$.





• $AB = |z_B - z_A|$; $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{AB}\right) = arg\ (z_B - z_A)$ (avec $A \neq B$)
• $\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}\right) = arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right)$ (avec $A \neq B$ et $C \neq D$)

• $(AB)//(CD) \Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel $(A \neq B$ et $C \neq D)$
• $(AB) \perp (CD) \Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $-\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{CD}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ imaginaire pur $(A \neq B$ et $C \neq D)$

• A, B, C alignés $\Leftrightarrow arg\left(\dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}\right) = 0 + 2k\pi$ ou $\pi + 2k\pi \Leftrightarrow \dfrac{z_{\overrightarrow{AC}}}{z_{\overrightarrow{AB}}}$ réel $(A \neq B$ et $A \neq C)$
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = r$ $(r > 0)$ est le cercle de centre A et de rayon r.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $|z - z_A| = |z - z_B|$ $(z_A \neq z_B)$ est la médiatrice du segment $[AB]$.
• L'ensemble des points M d'affixe z tels que $arg\ (z - z_A) = \theta + 2k\pi$ est la demi-droite partant de A (mais ne contenant pas A) dirigée par le vecteur $\overrightarrow{V}$ tel que $\left(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{V}\right) = \theta$

Complexes et transformations : (M est d'affixe z, M' est d'affixe z' et Ω est d'affixe ω)
• $z' = z + b \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par la translation de vecteur $\overrightarrow{V}$ dont l'affixe est b.
• $z' - \omega = e^{i\theta}(z - \omega) \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par la rotation de centre Ω et d'angle θ.
• $z' - \omega = k(z - \omega) \Leftrightarrow M'$ est l'image de M par l'homothétie de centre Ω et de rapport k.

d) Caractérisation d'un réel et d'un imaginaire pur

• z est réel $\Leftrightarrow Im(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\,z = 0 + 2k\pi$ ou $arg\,z = \pi + 2k\pi$.
• z est imaginaire pur $\Leftrightarrow Re(z) = 0 \Leftrightarrow \bar{z} = -z \Leftrightarrow z = 0$ ou $arg\ z = \dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$ ou $arg\ z = -\dfrac{\pi}{2} + 2k\pi$.

► *Exemples :*
• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $(2 + i)z + 3 - 4i$ soit imaginaire pur.
On pose $z = x + iy$ (x et y réels). $2iz + 3 - 4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow (2 + i)(x + iy) + 3 - 4i$ imaginaire pur $\Leftrightarrow (2x - y + 3) + i(x + 2y - 4)$ imaginaire pur $\Leftrightarrow 2x - y + 3 = 0$. E est donc la droite d'équation $y = 2x + 3$.

• Détermination de l'ensemble E des points M d'affixe z tels que $\dfrac{z - i}{z - 2}$ soit réel.
Soit A d'affixe i et B d'affixe 2.

$\dfrac{z-i}{z-2}$ réel $\Leftrightarrow z=i$ ou $arg\left(\dfrac{z-i}{z-2}\right)=0+2k\pi$ ou $arg\left(\dfrac{z-i}{z-2}\right)=\pi+2k\pi$ (avec $z\neq 2$).

Ce qui équivaut à $M=A$ ou $\left(\overrightarrow{MB},\overrightarrow{MA}\right)=0+2k\pi$ ou $\pi+2k\pi$ (avec $M\neq B$).

E est donc la droite (AB) privée du point B.

8) Probabilités

a) Combinaisons

DÉFINITION

Pour tout entier $n\geqslant 1$, on appelle factorielle de n le nombre noté $n!$ défini par $n!=n\times(n-1)\times(n-2)\times\cdots\times 2\times 1$.
Par convention, on pose $0!=1$.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉS

Étant donné un ensemble E comportant n éléments :

- Tout sous-ensemble de E comportant p éléments est appelé **combinaison** de p éléments de E. L'ordre des éléments n'a aucun importance.
- Le nombre de combinaisons de p éléments d'un ensemble E comportant n éléments est noté : $\binom{n}{p}$.
  Exemple : le nombre de combinaisons de 3 éléments d'un ensemble comportant 10 *éléments se note* $\binom{10}{3}$.
- Pour tout entier $n\geqslant 1$ et pour tout entier $p\leqslant n$: $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$
- Pour tout entier naturel n : $\binom{n}{0}=1$; $\binom{n}{1}=n$; $\binom{n}{n}=1$
  Pour p entier tel que $0\leqslant p\leqslant n$, $\binom{n}{n-p}=\binom{n}{p}$
  Pour p entier tel que $1\leqslant p\leqslant n$, $\binom{n-1}{p-1}+\binom{n-1}{p}=\binom{n}{p}$

PROPRIÉTÉ

Pour tous réels ou complexes a et b et pour tout entier $n\geqslant 1$,

$(a+b)^n=\binom{n}{0}a^n+\binom{n}{1}a^{n-1}b+\cdots+\binom{n}{p}a^{n-p}b^p+\cdots+\binom{n}{n-1}a\,b^{n-1}+\binom{n}{n}b^n$.

b) Tirages successifs et simultanés

On considère une urne comprenant n jetons et p un entier inférieur ou égal à n.

- Si on tire p jetons successivement **avec remise**, le nombre de tirages possibles est égal à n^p.
- Si on tire p jetons successivement **sans remise**, le nombre de tirages possibles est égal à $\dfrac{n!}{(n-p)!}$.
- Si on tire **simultanément** p jetons, le nombre de tirages possibles est égal à $\binom{n}{p}=\dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

c) Généralités sur les probabilités

Lors d'une expérience aléatoire :

• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
• Un événement A est une partie de l'univers.
• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
• L'événement $A\cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
• L'événement $A\cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A\cap B=\varnothing$.
• Si $\Omega=\{e_1,e_2,\cdots,e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0\leqslant p(e_i)\leqslant 1$ et $p(e_1)+p(e_2)+\cdots+p(e_n)=1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :
• $p(\varnothing)=0$; $p(\Omega)=1$
• $0\leqslant p(A)\leqslant 1$; $p\left(\overline{A}\right)=1-p(A)$
• $p(A\cup B)=p(A)+p(B)-p(A\cap B)$
(si A et B sont incompatibles alors $p(A\cup B)=p(A)+p(B)$)
• Dans le cas de l'équiprobabilité :
$p(A)=\dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega}=\dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

d) Variable aléatoire

Une variable aléatoire X définie sur un univers Ω est une fonction qui à chaque résultat possible associe un réel. Les valeurs possibles de X sont notées x_i. La probabilité que X prenne la valeur x_i est notée $p(X=x_i)$ ou p_i.

• Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
• Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
(l'espérance représente la valeur moyenne que prend X si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire)
• Variance de X :
$V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - (E(x))^2 = p_1(x_1)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 - (E(x))^2$
• Écart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance 3 fois de suite un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il n'obtient aucun 1 et aucun 2 et il perd 3 euros dans le cas contraire. X, la variable aléatoire égale au gain du joueur, ne peut prendre que les valeurs -3 et 6.
On a $p(X = 6) = \frac{4 \times 4 \times 4}{6 \times 6 \times 6} = \frac{8}{27}$ et $p(X = -3) = 1 - p(X = 6) = \frac{19}{27}$

x	-3	6
$p(X = x)$	$\frac{19}{27}$	$\frac{8}{27}$

$E(X) = -3 \times \frac{19}{27} + 6 \times \frac{8}{27} = -\frac{1}{3}$
$V(X) = 9 \times \frac{19}{27} + 36 \times \frac{8}{27} - \frac{1}{9} = \frac{152}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{152}{9}} = \frac{2\sqrt{38}}{3}$

e) Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)}$

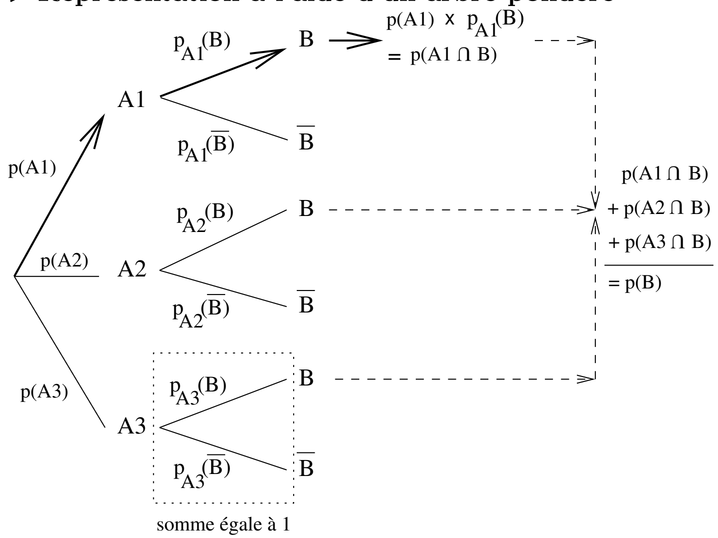
PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :
• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \frac{\text{nb de cas favorables pour A} \cap \text{B}}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
• $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

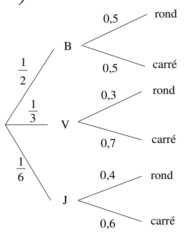
► **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



► **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**
• Sur les premières branches, on inscrit les $p(A_i)$.
• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.
• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).
• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

► *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$p(R) = \dfrac{1}{2} \times 0,5 + \dfrac{1}{3} \times 0,3 + \dfrac{1}{6} \times 0,4 = \dfrac{5}{12}$.

c) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$.

f) Indépendance de deux événements

DÉFINITION

Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$ (ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$)

g) Variables aléatoires indépendantes

DÉFINITION

Soit X et Y deux variables aléatoires définies sur le même univers.
X et Y sont dites indépendantes si pour **tous** les entiers i et j possibles, les événements $(X = x_i)$ et $(Y = y_j)$ sont indépendants, c'est à dire si $p((X = x_i) \cap (Y = y_j)) = p(X = x_i) \times p(Y = y_j)$.

h) Répétitions d'épreuves indépendantes

Si on répète n fois et de façon indépendante une même expérience aléatoire et si $p(A)$ représente la probabilité de l'événement A pour une de ces expériences aléatoires :

- La probabilité que l'événement A se réalise n fois est égale à $[p(A)]^n$.
- La probabilité que l'événement A ne se réalise jamais n fois est égale à : $\left[p(\overline{A})\right]^n = [1 - p(A)]^n$.
- La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à : $1 - p(\text{l'événement } A \text{ ne se réalise jamais}) = 1 - \left[p(\overline{A})\right]^n = 1 - [1 - p(A)]^n$.
- La probabilité que l'événement A se réalise exactement k fois est égale à : $\binom{n}{k} \times [p(A)]^k \times \left[p(\overline{A})\right]^{n-k} = \binom{n}{k} \times [p(A)]^k \times (1 - [p(A)])^{n-k}$

▶ *Exemple 1 :* On lance un dé normal 10 fois de suite et on s'intéresse au nombre de fois où l'on a obtenu le chiffre 6.

- La probabilité d'obtenir 10 fois le chiffre 6 est égale à $\left(\frac{1}{6}\right)^{10}$.
- La probabilité de ne jamais obtenir le chiffre 6 est égale à $\left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.
- La probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 $= 1 - p(\text{ne jamais obtenir le chiffre 6}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{10}$.
- La probabilité d'obtenir exactement 3 fois le chiffre 6 est égale à $\binom{10}{3} \times \left(\frac{1}{6}\right)^3 \times \left(\frac{5}{6}\right)^7$.

▶ *Exemple 2 :* Détermination du nombre minimal n de fois où il faut lancer un dé pour que la probabilité d'obtenir au moins une fois le chiffre 6 soit supérieur ou égale à $0,8$.

Cela revient à déterminer le plus petit entier n tel que $1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n \geqslant 0,8$

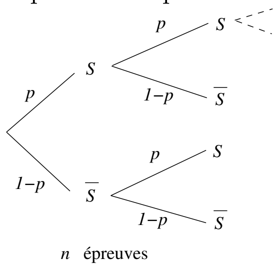
$\Leftrightarrow \left(\frac{5}{6}\right)^n \leqslant 0,8 \Leftrightarrow \ln\left[\left(\frac{5}{6}\right)^n\right] \leqslant \ln(0,8) \Leftrightarrow n \ln\left(\frac{5}{6}\right) \leqslant \ln(0,8) \Leftrightarrow n \geqslant \dfrac{\ln(0,8}{\ln\left(\frac{5}{6}\right)}$.

Le plus petit entier qui convient est 9. Il faut donc au moins 9 lancers.

i) Loi binomiale

DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre).
• On appelle **schéma de Bernoulli** toute répétition d'épreuves de Bernoulli identiques et indépendantes.



▶ Remarques :

• Les deux issues contraires d'une *épreuve* de Bernoulli se note en général S (pour « succès ») et $\overline{S}$ (ou E pour « échec »). La probabilité que S soit réalisé est noté en général p (la probabilité de $\overline{S}$ est alors $(1 - p)$, qui est aussi quelquefois notée q).
• Pour s'assurer que l'on a bien affaire à un *schéma* de Bernoulli, il faut vérifier que chaque expérience prise isolément n'admet que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre), que le « succès » a toujours la même probabilité d'apparaître et qu'il y a bien indépendance entre chacune des *épreuves* de Bernoulli successives.

DÉFINITION-PROPRIÉTÉS

Étant donné une épreuve de Bernoulli où la probabilité d'obtenir un succès S est p et le schéma de Bernoulli consistant à répéter n fois de manière indépendante cette épreuve.
Si note X la variable aléatoire qui à chaque issue possible du schéma de Bernoulli associe le nombre de fois où est apparu un succès S, la loi de probabilité de X est appelée **loi binomiale** de paramètres n et p et est notée $\mathcal{B}(n,p)$.
• Probabilité d'obtenir k succès : $p(X=k)=\binom{n}{k}\ p^k\ (1-p)^{n-k}$
(k entier tel que : $0 \leqslant k \leqslant n$)
• Espérance de X : $E(X)=np$
• Variance et écart-type de X : $V(X)=np(1-p)$; $\sigma(X)=\sqrt{np(1-p)}$

► *Exemple :* Si on reprend l'expérience aléatoire consistant à lancer 10 fois de suite un dé et que l'on s'intéresse au nombre X de fois où l'on obtient le chiffre 6, la loi de probabilité de X est une loi binomiale de paramètres $n=10$ et $p=\frac{1}{6}$.
L'espérance de X (nombre moyen de fois où on obtient le chiffre 6 si on répète un grand nombre de fois l'expérience aléatoire) est : $E(X)=10\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{3}$.

9) Intégration

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x=[F(x)]_a^b=F(b)-F(a)$ où F est une primitive de f sur I.
• Pour tout a de I, la fonction F définie par $F(x)=\displaystyle\int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t$ est la primitive de f sur I qui s'annule pour $x=a$.

► *Exemple :* $\displaystyle\int_1^e \frac{\ln x}{x}\,dx=\left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e=\frac{(\ln e)^2}{2}-\frac{(\ln 1)^2}{2}=\frac{1}{2}$.

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
• $\displaystyle\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x=-\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_b^c f(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x$ *(Relation de Chasles)*
• $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,\mathrm{d}x=\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x+\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,\mathrm{d}x=k\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\geqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant 0$
• Si $a\leqslant b$ et si $f(x)\leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant\int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x$
• Si $a\leqslant b$ et si $m\leqslant f(x)\leqslant M$ sur $[a,b]$ alors $m(b-a)\leqslant\displaystyle\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x\leqslant M(b-a)$
(inégalité de la moyenne)

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x$

Intégration par parties
Pour u et v dérivables sur un intervalle I contenant a et b telles que leurs dérivées soient continues sur I :
$\displaystyle\int_a^b u'(x)\,v(x)\,\mathrm{d}x=[u(x)\,v(x)]_a^b-\int_a^b u(x)\,v'(x)\,\mathrm{d}x$

En général, le but de la manœuvre est de se débarrasser du terme qui gêne pour la recherche d'une primitive. Si l'expression que l'on veut intégrer est de la forme $(ax+b)e^x$ ou $(ax+b)\sin x$ ou $(ax+b)\cos x$, il est conseillé de prendre $v(x)=ax+b$.
► *Exemples :*
1) $\displaystyle\int_0^\pi \underbrace{2x}_{v}\,\underbrace{\cos x}_{u'}\,\mathrm{d}x=[\,\underbrace{2x}_{v}\,\underbrace{\sin x}_{u}]_0^\pi-\int_0^\pi \underbrace{2}_{v'}\,\underbrace{\sin x}_{u}\,\mathrm{d}x=0-[-2\cos x]_0^\pi=-4$
2) $\displaystyle\int_0^1 \underbrace{x}_{v}\,\underbrace{\mathrm{e}^{-x}}_{u'}\,\mathrm{d}x=[\,\underbrace{x}_{v}\times\underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{u}]_0^1-\int_0^1 \underbrace{1}_{v'}\times\underbrace{(-\mathrm{e}^{-x})}_{u}\,\mathrm{d}x=-\mathrm{e}^{-1}-\left[\mathrm{e}^{-x}\right]_0^1$
$=1-2\mathrm{e}^{-1}$

3) Un cas classique :

$$\int_1^e \ln x \,\mathrm{d}x = \int_1^e \underbrace{1}_{u'} \times \underbrace{\ln x}_{v} \,\mathrm{d}x = [\underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\ln x}_{v}]_1^e - \int_1^e \underbrace{x}_{u} \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{v'} \,\mathrm{d}x = e - [x]_1^e$$

$= e - e + 1 = 1$

Calculs d'aires

f et g sont deux fonctions continues sur $[a, b]$.

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x) \,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

• Si pour tout $x \in [a, b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle -\int_a^b f(x) \,\mathrm{d}x$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*

• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses et par la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées.

• Pour déterminer l'aire entre une courbe et l'axe des abscisses, il faut d'abord étudier le signe de la fonction sur l'intervalle en question.

• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

10) Lois de probabilité continues

DÉFINITION

Étant donné f une fonction définie, continue et positive sur un intervalle I telle que $\displaystyle\int_a^b f(t) \,\mathrm{d}t = 1$ si $I = [a, b]$ et $\displaystyle\lim_{x \to +\infty} \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t = 1$ si $I = [a, +\infty[$.

On dit qu'une variable aléatoire X suit la **loi de probabilité continue de densité f sur I** si pour tous réels x et y de I :

$$p(x \leqslant X \leqslant y) = \int_x^y f(t) \,\mathrm{d}t \quad ; \quad p(X \leqslant x) = \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t \quad ; \quad p(X \geqslant x) = 1 - \int_a^x f(t) \,\mathrm{d}t.$$

(on a les mêmes résultats avec des inégalités strictes)

► **Remarque :** la probabilité $p(X \leqslant x)$ représente « l'aire sous la courbe » de f entre a et x.

DÉFINITION

• Si la densité f est définie sur $I = [a, b]$ par $f(t) = \dfrac{1}{b - a}$, la loi de probabilité est dite **loi uniforme** sur $[a, b]$.

• Si la densité f est définie sur $I = [0, +\infty[$ par $f(t) = \lambda e^{-\lambda t}$ $(\lambda > 0)$, la loi de probabilité est dite **loi exponentielle** de paramètre λ sur $[0, +\infty[$.

► *Exemple :*

La durée de vie X (en heures) d'un composant électronique suit la loi exponentielle de paramètre $\lambda = 0,0006$ sur $[0, +\infty[$.

a) La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie inférieure à 1000 heures est donnée par :

$$p(X < 1000) = \int_0^{1000} 0,0006 e^{-0,0006t} \,\mathrm{d}t = \left[-e^{-0,0006t}\right]_0^{1000} = 1 - e^{-0,6}.$$

b) La probabilité qu'un de ces composants pris au hasard ait une durée de vie supérieure à 500 heures est donnée par :

$$p(X > 500) = 1 - \int_0^{500} 0,0006 e^{-0,0006t} \,\mathrm{d}t = 1 - \left[-e^{-0,0006t}\right]_0^{500} = e^{-0,3}.$$