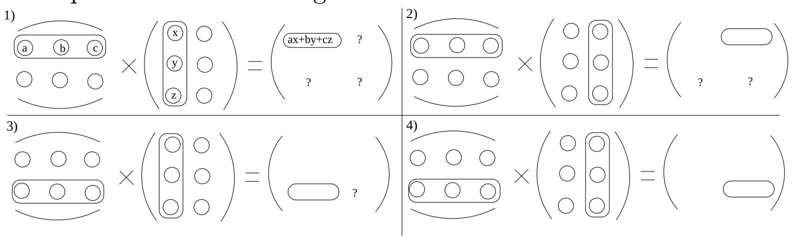
Kit de survie : Graphes

1) Rappels sur les multiplications de matrices

• $A \times B$: matrice avec le même nombre de lignes que A et le même nombre de colonnes que B
• On procéde suivant les lignes de A et les colonnes de B :



• $A^n = \underbrace{A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$ (n entier $\geqslant 2$; A matrice carrée) ; $A \times B \neq B \times A$

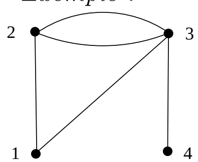
► *Exemple :*
$$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\times 2+4\times 1 & 2\times 6+4\times 3 \\ 1\times 2+2\times 1 & 1\times 6+2\times 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 24 \\ 4 & 12 \end{pmatrix}$$

2) Les graphes non orientés

DÉFINITIONS

• Un graphe est composé de sommets dont certains sont reliés par des arêtes (on dit alors que ces sommets sont **adjacents**).
• Le nombre total de sommets est appelé **ordre du graphe**.
• On appelle **degré d'un sommet** le nombre d'arêtes dont ce sommet est une extrémité.
• La **matrice associée** à un graphe d'ordre n est une matrice carrée de n lignes et de n colonnes où le terme situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre d'arêtes reliant les sommets i et j. *(la matrice associée à un graphe non orienté est symétrique par rapport à sa diagonale)*

► *Exemple :*



Graphe G1

L'ordre de $G1$ est égal à 4.
Le degré du sommet 3 est égal à 4.
Les sommets 1 et 2 sont adjacents, ce qui n'est pas le cas des sommets 1 et 4.
Les sommets 2 et 3 sont reliés par des arêtes multiples.

La matrice associée à ce graphe est $A \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$

PROPRIÉTÉ

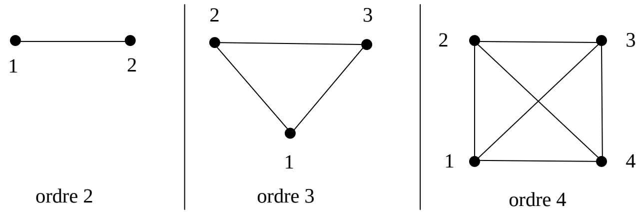
La somme des degrés d'un graphe non orienté est égal à deux fois le nombre total d'arêtes.

► *Pour le graphe $G1$:* la somme des degrés est égale à 2+3+4+1=10 et le nombre d'arêtes est égal à 5.

DÉFINITION

Un graphe est dit **complet** si chaque sommet est relié à tous les autres par au moins une arête.

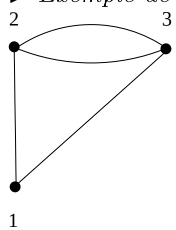
► Le graphe $G1$ n'est pas complet, puisque les sommets 1 et 4 ne sont pas reliés.
► *Remarque :* les graphes complets d'ordre 2, 3 et 4 (sans arêtes multiples et sans boucles) sont donnés ci-dessous.



DÉFINITIONS

• Un **sous-graphe** d'un graphe G est composé de certains sommets de G et de certaines arêtes de G qui relient ces sommets.
• Un sous-graphe est dit **complet** si chacun de ses sommets est relié à tous les autres.

► *Exemple de sous-graphe de $G1$:*



3) Coloration des graphes

DÉFINITIONS

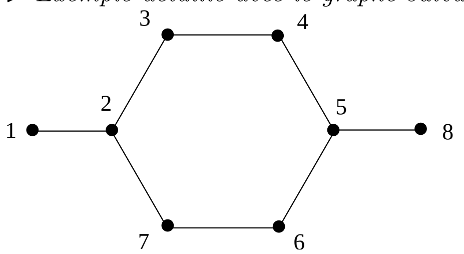
• **Colorer un graphe** consiste à affecter une couleur à chacun des sommets de sorte que deux sommets adjacents ne portent pas la même couleur.
• On appelle **nombre chromatique** d'un graphe le plus petit nombre de couleurs permettant de le colorer.

Encadrement du nombre chromatique :
• Si le graphe est complet, son nombre chromatique est égal à son degré (nombre total de sommets).
• Dans le cas contraire :
– On cherche le sous-graphe complet dont le nombre de sommets N est le plus grand.
– On détermine Δ, le plus haut degré des sommets de graphe.
– On a alors : $N \leqslant$ nombre chromatique $\leqslant \Delta + 1$.
– *Remarque :* si on est capable de colorier pratiquement le graphe avec les N couleurs, le nombre chromatique est alors égal à N.

► *Exemple :* avec le graphe $G1$
On a $\Delta = 4$ (4 arêtes issues du sommet 3) et le sous-graphe complet le ¡¡plus grand¿¿ est celui composé des sommets 1, 2 et 3 (voir ci-dessus). On a donc $N = 3$ et $3 \leqslant$ nombre chromatique $\leqslant 5$.

Algorithme de coloration :
• On classe dans un tableau les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés.
• On attribue une nouvelle couleur (avec les lettres A,B,... par exemple) au premier sommet non encore coloré du tableau et la même couleur à chaque sommet non adjacent à un sommet de cette couleur (dans l'ordre du tableau).
• On recommence l'étape précédente jusqu'à ce que tous les sommets soient colorés.

► *Exemple détaillé avec le graphe suivant :*



Etape 1 : on a classé les sommets dans l'ordre décroissant de leurs degrés et on a attribué la couleur A au 1er sommet 2 et au sommet 5 qui ne lui est pas adjacent. On n'a pas pu attribué la couleur A à un autre des sommets car ils sont tous reliés à 2 ou à 5.

sommet	2	5	3	4	6	7	1	8
degré	3	3	2	2	2	2	1	1
couleur	A	A						

Etape 2 : on a attribué la couleur B au sommet 3 (1er sommet libre) et aux sommets 6, 1 et 8 qui ne lui sont pas adjacents. On n'a pas pu attribué la couleur B à un autre des sommets libres car ils sont tous reliés à 3, 6, 1 ou 8.

sommet	2	5	3	4	6	7	1	8
degré	3	3	2	2	2	2	1	1
couleur	A	A	B		B		B	B

Dernière étape : on a attribué la couleur C au sommet 4 (1er sommet libre) et au sommet 7 qui ne lui est pas adjacent.

sommet	2	5	3	4	6	7	1	8
degré	3	3	2	2	2	2	1	1
couleur	A	A	B	C	B	C	B	B

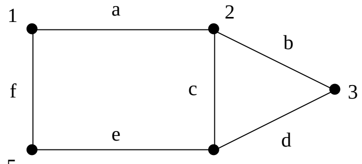
Remarque : Cette méthode ne permet pas en général d'obtenir une coloration minimale. Ici, $N = 2$ et une ≪ coloration à la main ≫ aurait permis de n'utiliser que deux couleurs (le nombre chromatique est égal à 2).

4) Chaînes et cycles d'un graphe

DÉFINITIONS

• Une **chaîne** est une liste ordonnée d'arêtes permettant de décrire un ¡¡chemin¿¿ reliant un sommet à un autre.
• La **longueur** d'une chaîne est le nombre d'arêtes qui la composent.
• Une chaine est dite **fermée** si le sommet d'arrivée est le même que le sommet de départ.
• Un **cycle** est une chaîne fermée composée d'arêtes toutes distinctes.
• Une chaîne est dite **eulérienne** si elle contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
• Un cycle est dite **eulérien** si il contient une fois et une seule chaque arête du graphe.
• Un graphe est dit **connexe** si deux sommets quelconques peuvent être reliés par au moins une chaîne.

▶ *Exemple :*



Graphe G2

a,c,d est une chaîne non fermée (non eulérienne).
a,c,d,b,a est une chaîne fermée (non eulérienne).
a,c,e,f est un cycle (non eulérien).
a,f,e,c,b,d est une chaîne eulérienne.
Le graphe est connexe.

PROPRIÉTÉS

> • Un graphe connexe admet un cycle eulérien si et seulement si tous ces sommets sont de degrés pairs.
> • Un graphe connexe admet une chaîne eulérienne entre deux sommets si et seulement si ces deux sommets sont les seuls à être de degré impair.

▶ *Exemple :* Le graphe $G2$ (voir ci-dessus) est connexe et les sommets 2 et 4 sont les seuls sommets impairs. Cela prouve qu'il existe une chaine eulérienne entre ces deux sommets, par contre ce graphe ne peut admettre de cycle eulérien.

DÉFINITIONS

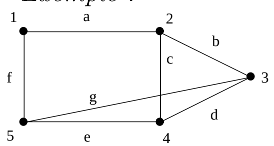
> • La **distance** entre deux sommets est la plus courte longueur des chaînes qui les relient.
> • Le **diamètre** d'un graphe est la plus grande des distances entre deux de ces sommets.

▶ *Exemple :* Dans le graphe $G2$, la distance entre les sommets 1 et 3 est égale à 2. Le diamètre du graphe est aussi égal à 2.

PROPRIÉTÉ

> Pour tout entier $n \geqslant 2$:
> Si A est la matrice associée à un graphe alors le terme de A^n situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au nombre de chaînes de longueur n reliant le sommet i au sommet j.

▶ *Exemple :*



On a $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ et $A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 6 & 2 & 2 & 6 \\ 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \\ 2 & 7 & 4 & 5 & 7 \\ 2 & 7 & 5 & 4 & 7 \\ 6 & 2 & 7 & 7 & 2 \end{pmatrix}$.

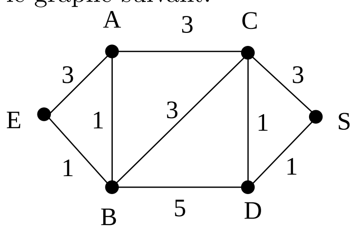
Le nombre de chaînes de longueur 3 reliant les sommets 3 et 5 est égal à 7 :
b,a,f - b,c,e - b,b,g - d,d,g - g,g,g - g,f,f - g,e,e
Il n'y a aucune chaîne fermée de longueur 3 partant de et arrivant au sommet 1.

5) Graphes pondérés

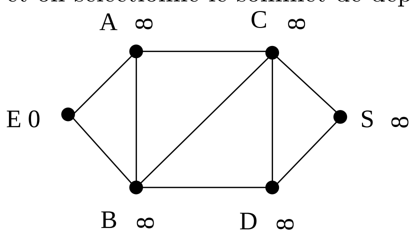
DÉFINITIONS

> • Un **graphe pondéré** est un graphe dont les arêtes sont affectés de coefficients positifs.
> • Le **poids d'une chaîne** est la somme des coefficients des arêtes qui la composent.
> • Parmi les chaînes qui relient deux sommets, celles qui ont le poids le plus faible sont appelées **plus courtes chaînes** entre ces sommets.

La recherche d'une plus courte chaîne s'effectue avec **l'algorithme de Dijkstra** :
▶ *Exemple :* recherche de la plus courte chaîne du sommet E au sommet S dans le graphe suivant.



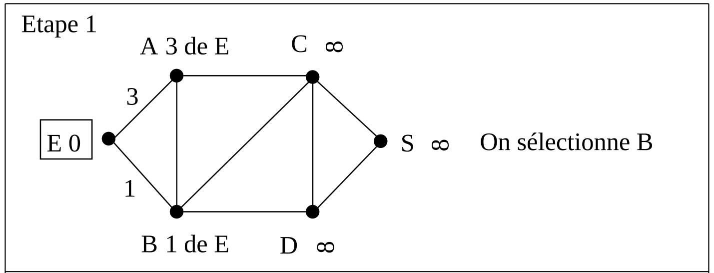
• **Initialisation :** on affecte 0 au sommet de départ E et ∞ aux autres sommets et on sélectionne le sommet de départ.

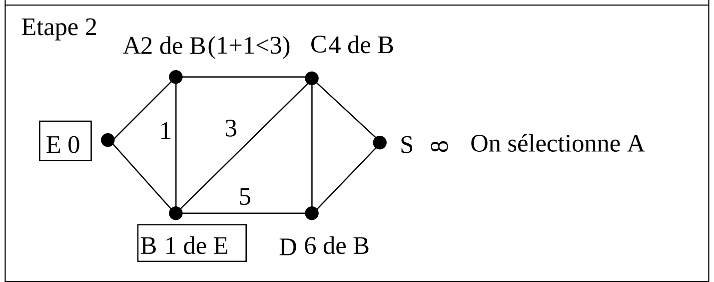


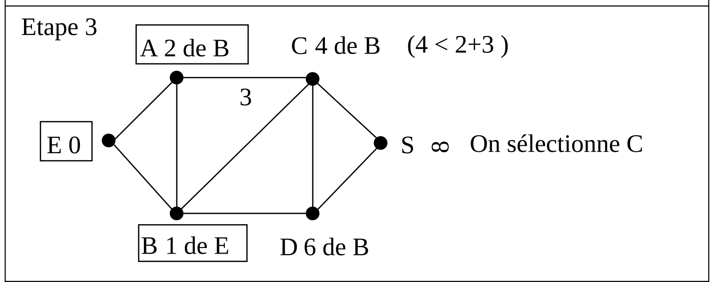
On sélectionne E

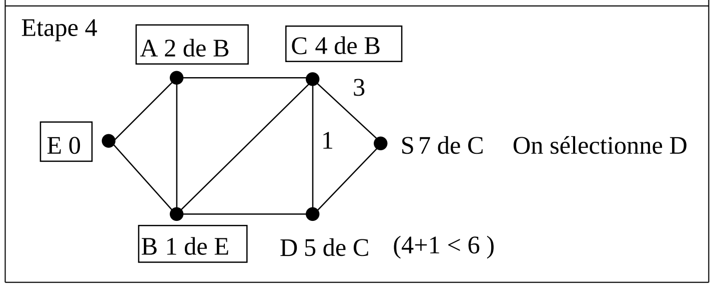
• **Pour chaque étape :** on ajoute à tous les sommets adjacents au sommet sélectionné précédemment le coefficient de chaque arête (à condition que ces sommets n'aient pas déjà été sélectionnés). Si le résultat obtenu est inférieur au coefficient actuel, on affecte au sommet adjacent ce nouveau nombre (en notant de quel sommet il provient). On sélectionne alors le sommet dont le coefficient est le plus bas parmi les sommets non encore sélectionnés. On répète le processus jusqu'à ce que tous les sommets soient sélectionnés.

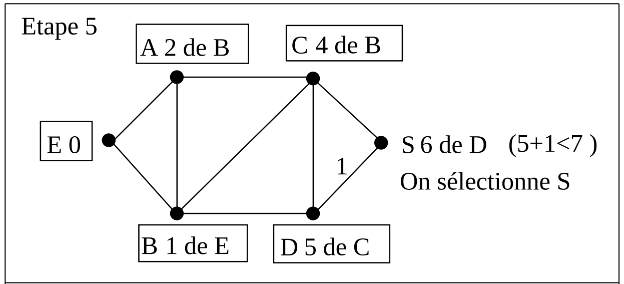
Application : *(lire de gauche à droite - les sommets sélectionnés sont encadrés - dans la pratique, on n'utilise qu'un seul graphe que l'on complète au crayon au fur et à mesure)*

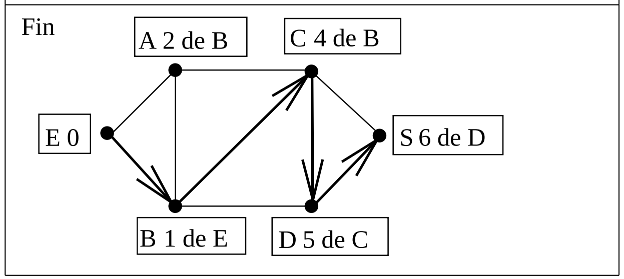












• **Détermination de plus courte chaîne :** on part du sommet d'arrivée S et on remonte jusqu'à E avec le dernier graphe. S vient de D - D vient de C - C vient de B - B vient de E. La plus courte chaîne est donc : E-B-C-D-S

• **Rédaction sur la copie :** en plus du graphe modifié au fur et à mesure, on indique les changements effectués à chaque étape.

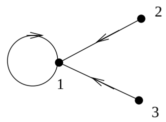
Etape 1	A :3 de E - B :1 de E - sélection de B
Etape 2	A :2 de B - C :4 de B - D :6 de B - sélection de A
Etape 3	sélection de C
Etape 4	D :5 de C - S :7 de C - sélection de D
Etape 5	S :6 de D - sélection de S

6) Graphes orientés - Graphes probabilistes

DÉFINITION

Un **graphe orienté** est un graphe dont les arêtes ont un sens.
(la matrice associée n'est plus symétrique par rapport à sa diagonale - les sommets peuvent être munis de boucles orientées - les chaînes ont aussi un sens dont on doit tenir compte pour la connexité, la recherche de chaînes eulériennes, l'algorithme de Dijkstra ...)

► *Exemple :*



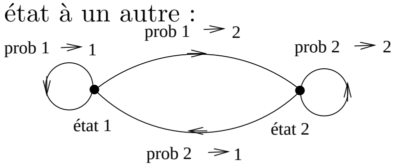
Ce graphe n'est pas connexe (pas de chaîne de 2 vers 3).
Il n'y a pas de chaîne eulérienne (les trois sommets sont de degré 1).
La matrice associée à ce graphe est $A\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

DÉFINITIONS

• On appelle **graphe probabiliste**, tout graphe orienté pondéré tel que la somme des poids des arêtes issues de chaque sommet soit égale à 1.
• La **matrice de transition** M d'un graphe probabiliste à n sommets est une matrice carrée de n lignes et de n colonnes où le terme situé à la $i^{\text{ème}}$ ligne et à la $j^{\text{ème}}$ colonne est égal au poids de l'arête orientée allant du sommet i au sommet j si elle existe et à 0 si elle n'existe pas. *(ne pas confondre avec la matrice associée)*

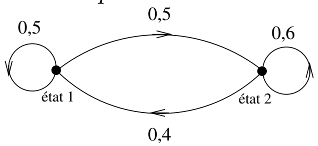
PROPRIÉTÉS

Cas général :
Si P_0 est la matrice ligne représentant l'état initial et si P_n est la matrice ligne représentant l'état probabiliste à l'étape n, alors on a : $P_{n+1} = P_n\,M$ et $P_n = P_0\,M^n$ (où M est la matrice de transition).
Cas des graphes probabilistes à 2 états (donc à 2 sommets) :
• Étant donné une entité ne connaissant que deux états possibles et pouvant passer aléatoirement d'un état à l'autre selon des probabilités connues. On peut modéliser la situation avec un graphe probabiliste où les deux sommets représentent les deux états possibles et où le poids d'une arête représente la probabilité de passage d'un état à un autre :



• Si on note a_0 la probabilité initiale de l'état 1, a_n la probabilité de l'état 1 au bout de n étapes, b_0 la probabilité initiale de l'état 2 et b_n la probabilité de l'état 2 au bout de n étapes, on a :
$P_0 = (a_0, b_0)$ (avec $a_0 + b_0 = 1$) ; $P_n = (a_n, b_n)$ (avec $a_n + b_n = 1$)
et $(a_n, b_n) = (a_0, b_0)\ M^n$ (où $M = \begin{pmatrix} \text{prob}\,1 \to 1 & \text{prob}\,1 \to 2 \\ \text{prob}\,2 \to 1 & \text{prob}\,2 \to 2 \end{pmatrix}$ est la matrice de transition)
• Soit $x = \lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ et $y = \lim\limits_{n\to+\infty} b_n$. Si la matrice de transition M n'admet aucun terme nul alors on a : $(x, y) = (x, y)\ M$ et $x + y = 1$ *(ce qui permet de déterminer* $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n$ *et* $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n$*).*

► *Exemple :*



On a $M = \begin{pmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{pmatrix}$.
Si on suppose de plus que $a_0 = 1$ (ce qui implique que $b_0 = 0$), on peut en déduire que :
• $(a_2, b_2) = (a_0, b_0)\ M^2 = (1, 0)\begin{pmatrix} 0,45 & 0,55 \\ 0,44 & 0,56 \end{pmatrix} = (0,45\ ,\ 0,55)$.
Donc, $a_2 = 0,45$ et $b_2 = 0,55$.
• $(x, y) = (x, y)\ M \Leftrightarrow \begin{cases} x = 0,5x + 0,4y \\ y = 0,5x + 0,6y \end{cases} \Leftrightarrow 0,5x - 0,4y = 0$.
De plus, $x + y = 1$, donc $y = 1 - x$.
On en déduit que : $0,5x - 0,4(1 - x) = 0 \Leftrightarrow 0,9x = 0,4 \Leftrightarrow x = \dfrac{4}{9}$.
Ainsi, on a $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \dfrac{4}{9}$ (et donc, $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \dfrac{5}{9}$.