Kit de survie - Bac ES

1. Etude du signe d'une expression

a) Signe de $ax + b$ $\quad (a \neq 0)$

On détermine la valeur de x qui annule $ax + b$, puis on applique la règle : « signe de a après le 0 ».

x	$-\infty$		$-b/a$		$+\infty$
$ax + b$		signe de $(-a)$	0	signe de a	

b) Signe de $ax^2 + bx + c$ $\quad (a \neq 0)$

On calcule la discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ (sauf cas évidents)
• Si $\Delta < 0$, on applique la règle : « toujours du signe de a ».

x	$-\infty$		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	

• Si $\Delta = 0$, on calcule la racine double : $x_1 = -\dfrac{b}{2a}$.
On applique alors la règle : « toujours du signe de a et s'annule pour $x = x_1$ ».

x	$-\infty$		x_1		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de a	

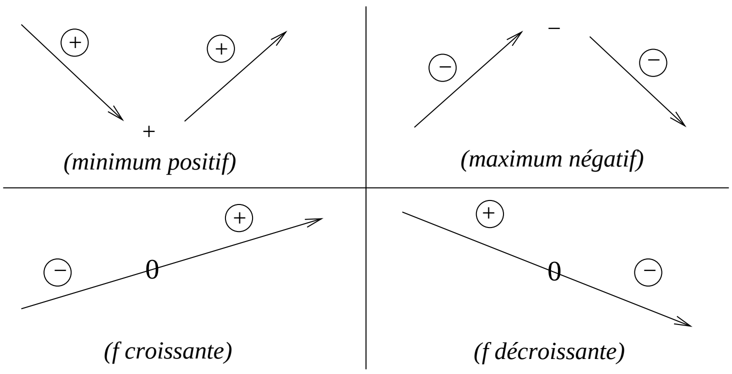
• Si $\Delta > 0$, on calcule les deux racines : $x_1 = \dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $x_2 = \dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$.
On applique alors la règle : « signe de a à l'extérieur des racines ».

x	$-\infty$		x_1		x_2		$+\infty$
$ax^2 + bx + c$		signe de a	0	signe de $(-a)$	0	signe de a	

(on suppose que $x_1 < x_2$)

c) Utilisation des variations d'une fonction pour déterminer son signe

Les cas les plus classiques :



d) Pour les autres expressions :

Pour étudier le signe d'une expression $A(x)$ (qui n'est pas du premier, ni du second degré et après avoir factorisé au maximum) sur un intervalle I, on résoud l'inéquation $A(x) \geqslant 0$ *(on cherche ce qui annule l'expression et où mettre le(s) signe(s) +).*

► *Exemple :* Etude du signe de $(3 - \ln x)$ sur $I =]0; +\infty[$.
$3 - \ln x \geqslant 0 \Leftrightarrow 3 \geqslant \ln x \Leftrightarrow \ln(e^3) \geqslant x \Leftrightarrow e^3 \geqslant x$.
On en conclut que l'expression s'annule pour $x = e^3$ et qu'il faut mettre le signe + pour $0 < x < e^3$:

x	0		e^3		$+\infty$
$3 - \ln x$	||	$+$	0	$-$	

2. Parité

• f est paire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.
• f est impaire si D_f est symétrique par rapport à 0 et si $f(-x) = -f(x)$ pour tout $x \in D_f$. La courbe dans un repère orthogonal est symétrique par rapport à l'origine.

3. Axe et centre de symétrie

• C_f admet la droite d'équation $x = a$ comme axe de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $f(a+h) = f(a-h)$.

• C_f admet le point $\Omega\,(a,b)$ comme centre de symétrie dans un repère orthogonal si pour tout h tel que $a \pm h \in D_f$, $\dfrac{f(a+h) + f(a-h)}{2} = b$.

4. Limites

• Limite d'une somme :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l + l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$

• Limite d'un produit :

$\underbrace{(\ \ )}_{\to l} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to l'} \to l \times l'$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to l>0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to -\infty$
$\underbrace{(\ \ )}_{\to l<0} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \to +\infty$	$\underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} \to -\infty$

• Limite de l'inverse :

$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to l\neq 0}}\right) \to \frac{1}{l}$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty}}\right) \to 0$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^+}}\right) \to +\infty$	$\left(\dfrac{1}{\underbrace{(\ \ )}_{\to 0^-}}\right) \to -\infty$

• Limite d'un quotient :
Pour les quotients (autres que les fonctions rationnelles en $\pm\infty$), on « sépare la fraction » :
$\dfrac{(\ \ )}{(\ \ )} = (\ \ \ ) \times \dfrac{1}{(\ \ )}$

• Formes indéterminées :

Les deux cas de forme indéterminée sont : $\underbrace{(\ \ )}_{\to +\infty} + \underbrace{(\ \ )}_{\to -\infty}$; $\underbrace{(\ \ )}_{\to \pm\infty} \times \underbrace{(\ \ )}_{\to 0}$

• **Polynômes et fonctions rationnelles en $\pm\infty$:**

• En $\pm\infty$, la limite d'une fonction polynome est égale à la limite de son terme de plus haut degré. • En $\pm\infty$, la limite d'une fonction rationnelle est égale à la limite du quotient des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur *(ne pas oublier de simplifier le quotient des termes de plus haut degré avant de déterminer la limite).*

5. Asymptotes

• Si $\lim\limits_{x \to a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite verticale d'équation $x = a$ est asymptote à C_f. • Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) = b$ alors la droite horizontale d'équation $y = b$ est asymptote à C_f. • Si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à C_f. • De façon générale, si $\lim\limits_{x \to \pm\infty} f(x) - g(x) = 0$ alors les courbes C_f et C_g sont asymptotes.

• Pour déterminer la position relative entre deux courbes C_f et C_g, on étudie le signe de $f(x) - g(x)$ (méthode aussi valable pour les asymptotes horizontales et obliques) :
- si $f(x) - g(x) \geqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située au dessus de C_g sur I.
- si $f(x) - g(x) \leqslant 0$ pour tout x d'un intervalle I, alors C_f est située en dessous de C_g sur I.

6. Dérivation

• **Dérivées des fonctions usuelles :**

$f(x) = a \Rightarrow f'(x) = 0$	$f(x) = ax + b \Rightarrow f'(x) = a$	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$
$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$	$f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{1}{x^2}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{2}{x^3}$	$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\dfrac{3}{x^4}$	$f(x) = \sqrt{x} \Rightarrow f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}}$

• **Opérations sur les fonctions dérivables :**

Fonction	**Fonction dérivée**
$f + g$	$f' + g'$
$k\,f \quad$ (k réel)	$k\,f'$
$f\,g$	$f'\,g + f\,g'$

Fonction	**Fonction dérivée**
f^2	$2\,f'\,f$
$\dfrac{1}{f}$	$-\dfrac{f'}{f^2}$
$\dfrac{f}{g}$	$\dfrac{f'\,g - f\,g'}{g^2}$

7. Tangente

• Si f est dérivable en a alors une équation de la tangente à C_f au point d'abscisse a est : $y = f(a) + f'(a)(x - a)$ • Pour déterminer les abscisses des éventuels points de C_f où la tangente est parallèle à une certaine droite d'équation $y = mx + p$, il suffit de résoudre l'équation $f'(x) = m$. (les coefficients directeurs devant être égaux)

8. Équation $f(x) = k$

• Si f est **continue** et **strictement croissante** ou **strictement décroissante** sur un intervalle I et si k est compris entre les valeurs de f aux bornes de I alors l'équation $f(x) = k$ admet une unique solution x_0 dans I. • Pour déterminer une valeur approchée de x_0, on utilise la méthode du « balayage ».

► *Exemple :* la fonction f définie par $f(x) = x + \ln x$ est continue et strictement croissante sur $I = [1, 2]$ car f est dérivable et $f'(x) = 1 + \dfrac{1}{x} > 0$ sur I. De plus 2 est compris entre $f(1) = 1$ et $f(2) \approx 2,7$. On peut donc en conclure que l'équation $f(x) = 2$ admet une unique solution x_0 dans $[1, 2]$.

Pour déterminer une valeur approchée de x_0 à 10^{-1} près, on balaye l'intervalle avec un pas de $0,1$:

x	1	1,1	1,2	1,3	1,4	**1,5**	**1,6**	1,7	1,8	1,9	2
$f(x)$	1	1,19	1,38	1,56	1,73	**1,90**	**2,07**				

On a arrêté les calculs après $1,6$ car 2 a été « franchi »par $f(x)$.
En effet, d'après le tableau, $f(1,5) < 2 < f(1,6)$. On peut donc en déduire que : $1,5 < x_0 < 1,6$.
Conclusion :
$1,5$ est une valeur approchée de x_0 **par défaut** à 10^{-1} près.
$1,6$ est une valeur approchée de x_0 **par excés** à 10^{-1} près.

9. Logarithme

a) Propriétés

• $\ln x$ n'existe que si $x > 0$

• Si $a > 0$ et $b > 0$:
$\ln(ab) = \ln a + \ln b$; $\ln\left(\dfrac{1}{a}\right) = -\ln a$; $\ln\left(\dfrac{a}{b}\right) = \ln a - \ln b$; $\ln(a^\alpha) = \alpha \ln a$; $\ln\sqrt{a} = \dfrac{1}{2}\ln a$

• $\ln e = 1$; $\ln 1 = 0$; $\ln(e^n) = n$ (n entier)

Signe du logarithme : $\ln x < 0$ si $0 < x < 1$; $\ln x > 0$ si $x > 1$

• $\ln a = \ln b \Leftrightarrow a = b$; $\ln a < \ln b \Leftrightarrow a < b$; $\ln a \leqslant \ln b \Leftrightarrow a \leqslant b$

• Pour les équations et inéquations avec logarithme, ne pas oublier de commencer par définir les conditions d'existence (les expressions contenues dans un logarithme doivent être strictement positives).

▶ *Exemples d'équations et d'inéquations :*

• $\ln x + \ln 2 = 5$. Condition d'existence : $x > 0$.
Avec cette condition : $\ln x + \ln 2 = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = 5 \Leftrightarrow \ln(2x) = \ln(e^5) \Leftrightarrow 2x = e^5 \Leftrightarrow x = \dfrac{e^5}{2}$. $S = \left\{\dfrac{e^5}{2}\right\}$

• $\ln(x+2) \leqslant 1$. Condition d'existence : $x + 2 > 0 \Leftrightarrow x > -2$.
Avec cette condition : $\ln(x+2) \leqslant 1 \Leftrightarrow \ln(x+2) \leqslant \ln e \Leftrightarrow x + 2 \leqslant e \Leftrightarrow x \leqslant e - 2$. $S =]-2; e-2]$

b) Limites

Situation en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} \ln x = +\infty$
Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\ln x}{x^\alpha} = 0$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{\ln x} = +\infty$ (on dit que x^α est plus fort que $\ln x$ en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI : Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

▶ *Exemple :*

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x+\ln x}{x+1} = \lim_{x\to+\infty} \frac{x}{x} \times \frac{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)}{\left(1+\frac{1}{x}\right)} = 1 \quad \text{car } \lim_{x\to+\infty} \frac{\ln x}{x} = 0 \text{ et } \lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$$

Situation en 0 :
$\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \ln x = -\infty$; Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x^\alpha \cdot \ln x = 0$
Méthode générale en cas de FI : on essaie de faire apparaître $x^\alpha \cdot \ln x$.

▶ *Exemple :*

$$\lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} + \ln x = \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x}(1 + x\ln x) = +\infty \quad \text{car } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} \frac{1}{x} = +\infty \text{ et } \lim_{\substack{x\to 0\\ x>0}} x\ln x = 0$$

c) Dérivées

- $(\ln x)\,' = \dfrac{1}{x}$; $(\ln u)\,' = \dfrac{u\,'}{u}$ $(u > 0)$

► *Exemple :* $\big(\ln(x^2+5x+1)\big)\,' = \dfrac{2x+5}{x^2+5x+1}$

10. Exponentielle

a) Propriétés

- $y = e^x \Leftrightarrow \ln y = x$; $\ln(e^x) = x$; $e^{\ln x} = x$ (pour $x > 0$)

- Pour tout x, $e^x > 0$; $e^0 = 1$; $e^1 = e$

- Pour tous réels a et b : $e^a \cdot e^b = e^{a+b}$; $\dfrac{1}{e^a} = e^{-a}$; $\dfrac{e^a}{e^b} = e^{a-b}$ $(e^a)^\alpha = e^{a\alpha}$

- $e^a = e^b \Leftrightarrow a = b$; $e^a < e^b \Leftrightarrow a < b$; $e^a \leqslant e^b \Leftrightarrow a \leqslant b$

► *Exemples d'équations et d'inéquations :*
- $e^{2x} - 2e^x - 3 = 0 \Leftrightarrow X^2 - 2X - 3 = 0$ avec $X = e^x$.

$\Delta = 16$; $X = -1$ ou $X = 3$. D'où, $e^x = -1$ (impossible) ou $e^x = 3 \Leftrightarrow x = \ln 3$. $S = \{\ln 3\}$
- $e^x < 5e^{-x} \Leftrightarrow e^x < \dfrac{5}{e^x} \Leftrightarrow e^{2x} < 5$ (car $e^x > 0$) $\Leftrightarrow 2x < \ln 5 \Leftrightarrow x < \dfrac{\ln 5}{2}$. $S = \left]-\infty; \dfrac{\ln 5}{2}\right[$.

b) Limites

Situation en $+\infty$: $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Pour tout $\alpha > 0$, $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^\alpha} = +\infty$; $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^\alpha}{e^x} = 0$ (on dit que e^x est plus fort que x^α en $+\infty$)

Méthode générale en cas de FI : Mettre le plus fort en facteur en haut et en bas.

► *Exemple :* $\lim\limits_{x\to+\infty} 3e^x - x^2 = \lim\limits_{x\to+\infty} e^x\left(3 - \dfrac{x^2}{e^x}\right) = +\infty$ car $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^2}{e^x} = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Situation en $-\infty$:
$\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$; $\lim\limits_{x\to-\infty} x^\alpha \cdot e^x = 0$ $(\alpha > 0)$
Méthode générale en cas de FI : on essaie de faire apparaître $x^\alpha \cdot e^x$.

► *Exemple :* $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x\left(x^2+1\right) = \lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x + e^x = 0$ car $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2e^x = 0$ et $\lim\limits_{x\to-\infty} e^x = 0$

c) Dérivées

- $(e^x)\,' = e^x$; $(e^u)\,' = u\,'e^u$

► *Exemples :* $(e^{-x})\,' = -e^{-x}$; $\left(e^{x^2+1}\right)' = 2x\,e^{x^2+1}$

11. Puissances

- Pour tous réels a et b avec $a > 0$: $a^b = e^{b\ln a}$; $\ln a^b = b\ln a$
- Pour tout réel $a > 0$ et pour tout entier $n > 1$: $\sqrt[n]{a} = a^{\frac{1}{n}}$; $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n = a$

► *Exemples :*
- $2^x = 5 \Leftrightarrow \ln(2^x) = \ln 5 \Leftrightarrow x\ln 2 = \ln 5 \Leftrightarrow x = \dfrac{\ln 5}{\ln 2}$
- Pour tout x, $(3^x)' = \left(e^{x\ln 3}\right)' = \ln 3 \times e^{x\ln 3} = \ln 3 \times 3^x$.
- $\lim\limits_{x\to-\infty} 0,5^x = \lim\limits_{x\to-\infty} e^{x\ln 0,5} = +\infty$, car $\ln 0,5 < 0$.

12. Primitives

• F est une primitive de f sur un intervalle I si F est dérivable sur I et si pour tout x de I, $F'(x) = f(x)$.
• Si F_0 est une primitive de f sur intervalle I alors toutes les primitives de f sur I sont de la forme $F(x) = F_0(x) + C$ où C est une constante réelle.
• Toute fonction continue sur un intervalle I admet des primitives sur I.

• **Primitives des fonctions usuelles :** *(F représente une primitive de f)*

$f(x) = a \Rightarrow F(x) = ax$	$f(x) = x \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^2}{2}$
$f(x) = x^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^3}{3}$	$f(x) = x^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{x^4}{4}$
$f(x) = \dfrac{1}{x} \Rightarrow F(x) = \ln x$	$f(x) = \dfrac{1}{x^2} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{x}$
$f(x) = \dfrac{1}{x^3} \Rightarrow F(x) = -\dfrac{1}{2x^2}$	$f(x) = \dfrac{1}{\sqrt{x}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{x}$
$f(x) = e^x \Rightarrow F(x) = e^x$	

• **Formules générales :**

forme de f	une primitive de f	exemples
$U'U$	$\dfrac{U^2}{2}$	$f(x) = \dfrac{1}{x} \times \ln x \Rightarrow F(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{2}$
$U'U^2$	$\dfrac{U^3}{3}$	$f(x) = 4(4x+1)^2 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(4x+1)^3}{3}$
$U'U^3$	$\dfrac{U^4}{4}$	$f(x) = 2x(x^2+1)^3 \Rightarrow F(x) = \dfrac{(x^2+1)^4}{4}$
$\dfrac{U'}{U^2}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{U}$	$f(x) = \dfrac{3x^2}{(x^3+1)^2} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{x^3+1}$
$\dfrac{U'}{U^3}$ $(U(x) \neq 0))$	$\dfrac{-1}{2U^2}$	$f(x) = \dfrac{7}{(7x+1)^3} \Rightarrow F(x) = \dfrac{-1}{2(7x+1)^2}$
$\dfrac{U'}{\sqrt{U}}$ $(U(x) > 0)$	$2\sqrt{U}$	$f(x) = \dfrac{3}{\sqrt{3x+2}} \Rightarrow F(x) = 2\sqrt{3x+2}$
$\dfrac{U'}{U}$ $(U(x) > 0)$	$\ln U$	$f(x) = \dfrac{2x}{x^2+1} \Rightarrow F(x) = \ln(x^2+1)$
$U'e^U$	e^U	$f(x) = 4e^{4x+5} \Rightarrow F(x) = e^{4x+5}$

• **Recherche pratique d'une primitive :**
Pour les fonctions usuelles, on utilise directement les formules.
Pour autres fonctions, il faut d'abord identifier la forme qui ressemble le plus à la fonction. Si on a la forme exacte, on utilise directement la formule correspondante. Dans le cas contraire, on écrit la forme exacte qu'il faudrait pour la fonction f et on rectifie en multipliant par le coefficient adéquat.

► *Exemple :*
Soit f définie par $f(x) = \dfrac{1}{3x+4}$ $(x > 0)$.On pense à la forme $\dfrac{u'}{u}$ (dont une primitive est $\ln u$) . On écrit que $f(x) = \dfrac{1}{3} \times \underbrace{\dfrac{3}{3x+4}}_{\text{forme exacte}}$ Une primitive de f est donc F définie par $F(x) = \dfrac{1}{3}\ln(3x+4)$.

13. Calcul intégral

Soit f une fonction continue sur un intervalle I :
• Pour tous a et b de I, $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = [F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$ où F est une primitive de f sur I.

► *Exemple :* $\displaystyle\int_1^e \frac{1}{x} \times \ln x\,dx = \left[\frac{(\ln x)^2}{2}\right]_1^e = \frac{(\ln e)^2}{2} - \frac{(\ln 1)^2}{2} = \frac{1}{2}$.

Propriétés de l'intégrale :
Pour f et g continues sur un intervalle I et pour a, b et c de I :
• $\displaystyle\int_b^a f(x)\,dx = -\int_a^b f(x)\,dx$.
• $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx + \int_b^c f(x)\,dx = \int_a^c f(x)\,dx$ *(Relation de Chasles)*
• $\displaystyle\int_a^b (f+g)(x)\,dx = \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Pour tout réel k, $\displaystyle\int_a^b (kf)(x)\,dx = k\int_a^b f(x)\,dx$ *(linéarité de l'intégrale)*
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \geqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \geqslant 0$
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant 0$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant 0$
• Si $a \leqslant b$ et si $f(x) \leqslant g(x)$ sur $[a,b]$ alors $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqslant \int_a^b g(x)\,dx$

Valeur moyenne d'une fonction sur un intervalle
Si f est continue sur $[a,b]$, la valeur moyenne de f sur $[a,b]$ est égale à $\displaystyle\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$

Calculs d'aires
f et g sont deux fonctions continues sur $[a,b]$.
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant g(x)$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre les courbes de f et g et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b g(x) - f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
(« intégrale de la plus grande moins la plus petite »)
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \geqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.
• Si pour tout $x \in [a,b]$, $f(x) \leqslant 0$ alors l'aire de la partie du plan comprise entre la courbe de f, l'axe des abscisses et les droites d'équation $x = a$ et $x = b$ est égale à $\displaystyle-\int_a^b f(x)\,dx$ en **unités d'aire**.

► *Remarques :*
• Pour avoir l'aire en cm^2, il faut multiplier le résultat en unités d'aire par :
(la valeur en cm d'une unité sur l'axe des abscisses) × (la valeur en cm d'une unité sur l'axe des ordonnées).
• Pour déterminer l'aire entre deux courbes, il faut d'abord étudier leur position relative sur l'intervalle en question.

14. Probabilités

a) Généralités

Lors d'une expérience aléatoire :
• L'univers Ω est l'ensemble des résultats possibles.
• Un événement A est une partie de l'univers.
• Un événement élémentaire est un événement ne comportant qu'un seul élément.
• L'événement contraire de l'événement A est l'événement noté $\overline{A}$ formé de tous les éléments de Ω n'appartenant pas à A.
• L'événement $A \cap B$ (noté aussi « A et B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant à A et à B.
• L'événement $A \cup B$ (noté aussi « A ou B ») est l'événement formé des éléments de Ω appartenant au moins à l'un des événements A ou B.
• Deux événements A et B sont dits incompatibles si $A \cap B = \varnothing$.
• Si $\Omega = \{e_1, e_2, \cdots, e_n\}$ et si à chaque résultat possible e_i on associe un nombre $p(e_i)$ tel que $0 \leqslant p(e_i) \leqslant 1$ et $p(e_1) + p(e_2) + \cdots + p(e_n) = 1$, on dit que l'on a défini une loi de probabilité sur Ω.
• La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des événements élémentaires qui le constituent.

Pour tous événements A et B :

• $p(\varnothing) = 0$; $p(\Omega) = 1$

• $0 \leqslant p(A) \leqslant 1$; $p\left(\overline{A}\right) = 1 - p(A)$; $p(A \cup B) = p(A) + p(B) - p(A \cap B)$
(si A et B sont incompatibles, $p(A \cup B) = p(A) + p(B)$)

• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p(A) = \dfrac{\text{nb d'éléments de A}}{\text{nb d'éléments de }\Omega} = \dfrac{\text{nb de cas favorables}}{\text{nb de cas possibles}}$

► *Exemple :* Tirage au hasard d'une carte dans un jeu de 32 cartes avec les événements :
$p(\text{la carte tirée est un roi}) = \dfrac{4}{32} = \dfrac{1}{8}$ $p(\text{la carte tirée est un coeur}) = \dfrac{8}{32} = \dfrac{1}{4}$
$p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{et}} \text{ un coeur}) = \dfrac{1}{32}$ $p(\text{la carte tirée est un roi } \underline{\text{ou}} \text{ un coeur}) = \dfrac{1}{8} + \dfrac{1}{4} - \dfrac{1}{32} = \dfrac{11}{32}$

b) Probabilités conditionnelles

DÉFINITION

Etant donné deux événements A et B ($B \neq \varnothing$) d'un univers Ω :
• On appelle probabilité de B sachant A, le réel noté $p_A(B)$ tel que $p_A(B) = \dfrac{p(A \cap B)}{p(A)}$

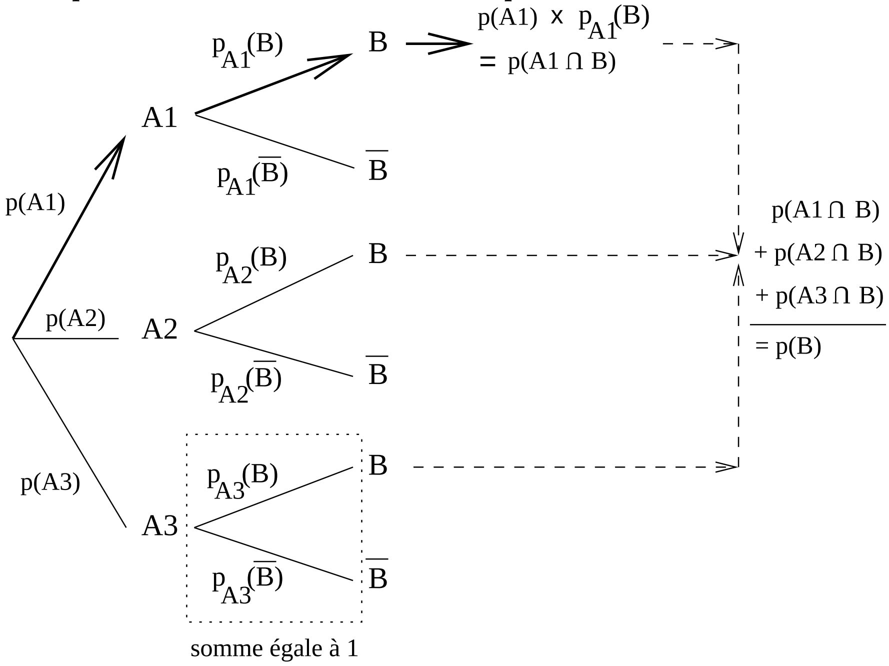
PROPRIÉTÉ

Pour tous événements non vides A et B :
• $0 \leqslant p_A(B) \leqslant 1$; $p_A\left(\overline{B}\right) = 1 - p_A(B)$
• Dans le cas de l'équiprobabilité, $p_A(B) = \dfrac{\text{nb de cas favorables pour } A \cap B}{\text{nb de cas favorables pour A}}$
• $p(A \cap B) = p(A) \times p_A(B) = p(B) \times p_B(A)$

PROPRIÉTÉ

Formule des probabilités totales
Si A_1, A_2, $\cdots$, A_n sont des événements non vides deux à deux incompatibles et dont l'union est égale à Ω (on dit alors qu'ils forment une partition de l'univers) alors pour tout événement B :
• $p(B) = p(A_1 \cap B) + \cdots + p(A_n \cap B) = p(A_1) \times p_{A_1}(B) + \cdots + p(A_n) \times p_{A_n}(B)$

▶ **Représentation à l'aide d'un arbre pondéré**



▶ **Règles de construction et d'utilisation des arbres pondérés :**

• Sur les premières branches, on inscrit les $p\,(A_i)$.

• Sur les branches du type $A_i \longrightarrow B$, on inscrit $p_{A_i}(B)$.

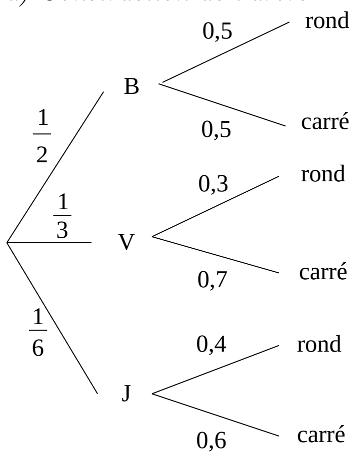
• Le produit des probabilités inscrites sur chaque branche d'un chemin donne la probabilité de l'intersection des événements placés sur ce chemin.

• La somme des probabilités inscrites sur les branches issues d'un même nœud est égale à 1 (loi des nœuds).

• La probabilité d'un événement E est la somme des probabilités des chemins qui aboutissent à E.

▶ *Exemple :* Un sac contient des jetons de trois couleurs, la moitié de blancs, le tiers de verts et le sixième de jaunes. 50% des jetons blancs, 30% des jetons verts et 40% des jetons jaunes sont ronds. Tous les autres jetons sont carrés. On tire au hasard un jeton.

a) Construction de l'arbre :



b) Sachant que le jeton tiré est blanc, quelle est la probabilité pour qu'il soit carré ?

La lecture directe de l'arbre nous donne que $p_B(C) = 0,5$.

c) Quelle est la probabilité pour que le jeton tiré soit rond ?

$p(R) = \dfrac{1}{2} \times 0,5 + \dfrac{1}{3} \times 0,3 + \dfrac{1}{6} \times 0,4 = \dfrac{5}{12}$.

d) Sachant qu'il est rond, quelle est la probabilité pour qu'il soit blanc ?

$p_R(B) = \dfrac{p(B \cap R)}{p(R)} = \dfrac{\frac{1}{2} \times 0,5}{\frac{5}{12}} = \dfrac{3}{5}$.

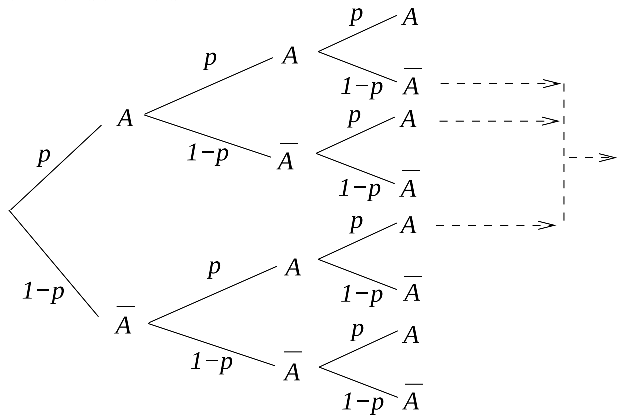
c) Indépendance en probabilité

DÉFINITION

- Deux événements A et B sont dits indépendants si $p(A \cap B) = p(A) \times p(B)$.
- Ce qui revient à dire que $p_A(B) = p(B)$ ou $p_B(A) = p(A)$

d) Répétition de façon indépendante d'une même expérience aléatoire

Si on répète n fois et de façon indépendante une même expérience aléatoire :
– La probabilité que l'événement A se réalise n fois est égale à $[p(A)]^n$.
– La probabilité que l'événement A ne se réalise jamais n fois est égale à $\left[p(\overline{A})\right]^n = [1 - p(A)]^n$.
– La probabilité que l'événement A se réalise au moins une fois est égale à :
$1 - p(\text{l'événement } A \text{ ne se réalise jamais}) = 1 - \left[p(\overline{A})\right]^n = 1 - [1 - p(A)]^n$.
– Dans les autres cas, on fait un arbre.
Exemple : si on répéte 3 fois de façon indépendante la même épreuve et que l'on cherche la probabilité que A se réalise 2 fois



e) Loi numérique associée à une expérience aléatoire

On considère une expérience aléatoire où à chaque résultat possible on peut associer un réel X. On note x_i les valeurs possibles de X et p_i la probabilité que X prenne la valeur x_i .
- Définir la loi de probabilité de X, c'est donner (sous forme d'un tableau) la probabilité de chacun des événements $X = x_i$.
- Espérance mathématique de X : $E(X) = \sum_{i=1}^{n} p_i x_i = p_1 x_1 + \cdots + p_n x_n$
- Variance de X : $V(X) = \left(\sum_{i=1}^{n} p_i (x_i)^2\right) - (E(x))^2 = p_1(x_1)^2 + \cdots + p_n(x_n)^2 - (E(x))^2$
- Ecart-type de X : $\sigma(X) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :* On lance un dé. Le joueur gagne 6 euros s'il obtient un « 1 » ou un « 6 » et il perd 2 euros dans le cas contraire. Soit X le gain du joueur.
Loi de probabilité de X : X ne peut prendre que les valeurs -2 et 6.
On a $p(X = -2) = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}$ et $p(X = 6) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

x_i	-2	6
p_i *(la somme doit être égale à 1)*	$\frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$

$E(X) = \frac{2}{3} \times (-2) + \frac{1}{3} \times 6 = \frac{2}{3}$; $V(X) = \frac{2}{3} \times (-2)^2 + \frac{1}{3} \times (6)^2 - \left(\frac{2}{3}\right)^2 = \frac{128}{9}$ et $\sigma(X) = \sqrt{\frac{128}{9}} = \frac{8\sqrt{2}}{3}$

f) Loi binomiale

DÉFINITION

• On appelle **épreuve de Bernoulli** toute expérience aléatoire ne présentant que deux issues possibles (contraires l'une de l'autre) que l'on note en général S (pour « succès ») et $\overline{S}$.
• Si on répéte plusieurs fois de façon identique et indépendante une épreuve de Bernoulli, on peut associer à chaque résultat possible le nombre X de « succès » obtenus. La loi numérique associée à X s'appelle alors une **loi binomiale**.

g) Adéquation de données à une loi équirépartie

PROPRIÉTÉ

Soit une épreuve conduisant aux issues a_1, a_2, $\cdots$,a_q.
On note $N = a_1 + a_2 + \cdots + a_q$ et $f_1 = \dfrac{a_1}{N}$,$f_2 = \dfrac{a_2}{N}$, $\cdots$, $f_q = \dfrac{a_q}{N}$, les fréquences correspondantes aux différentes issues.
On considère alors le nombre $d^2 = \left(f_1 - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \left(f_2 - \dfrac{1}{q}\right)^2 + \cdots + \left(f_q - \dfrac{1}{q}\right)^2$.
(f_i représente la probabilité de l'issue a_i et $\dfrac{1}{q}$ représente ce que serait cette même probabilité si l'expérience était conforme au modèle de la loi uniforme)

Expérimentalement, si on répète n fois cette épreuve ($n \geqslant 100$), on obtient une série statistique formée par les n valeurs de d^2 obtenues.
En notant D_9 le neuvième décile de cette série, on a la propriété suivante :
• Si $d^2 \leqslant D9$, alors on dit que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
• Si $d^2 > D9$, alors on dit que les données ne sont pas compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10%.
(Rappel : On appelle neuvième décile d'une série statistique, le nombre noté D_9 tel que 90% des valeurs de la série statistique soient inférieures ou égales à D_9)

► *Exemple :*
Un sac contient plusieurs milliers de pièces de monnaie de 3 types : des pièces de 10 centimes, des pièces de 20 centimes et des pièces de 50 centimes. On effectue, au hasard, 400 prélèvements d'une pièce avec remise et on obtient les résultats suivants :

Pièce	10 centimes	20 centimes	50 centimes
Effectifs	146	118	136

1) La valeur de d^2 associée à cette expérience est :

$$d^2 = \left(\frac{146}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{118}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 + \left(\frac{136}{400} - \frac{1}{3}\right)^2 \approx 0,0025$$

2) Pour savoir si on peut considérer que le sac contient autant de pièces de chaque type avec un risque d'erreur inférieur à 10%, on procéde à 1000 simulations sur ordinateur de l'opération consistant au tirage avec remise de 400 pièces. A chaque simulation on calcule la valeur de d^2 et on obtient la répartition suivante :

Valeur de $400d^2$	$[0;0,5[$	$[0,5;1[$	$[1;1,5[$	$[1,5;2[$	$[2;2,5[$	$[2,5;3[$
Effectifs	539	235	122	51	41	12

Cherchons une valeur approchée à 0,5 près par défaut du neuvième décile de la série des $400d^2$:
$539 + 235 + 122$ représente moins de 90% de l'effectif alors que $539 + 235 + 122 + 51$ représente plus de 90% de l'effectif. Le neuvième décile est donc dans l'intervalle $[1,5;2[$. Une valeur approchée à 0,5 près par défaut est donc $1,5$.

On en déduit qu'une valeur approchée du neuvième décile de la série des d^2 est $D_9 = \dfrac{1,5}{400} = 0,00375$.

Comme $d^2 \leqslant D_9$, on peut considérer que les données sont compatibles avec le modèle de la loi uniforme avec un risque d'erreur inférieur à 10% c'est à dire que le sac contient autant de pièces de chaque type avec un risque d'erreur inférieur à 10% .

15. Statistiques

a) Séries statistiques simples

• **Moyenne, Variance et écart type d'une série statistique :**
(valeurs du caractère : x_i ; effectif : n_i ; effectif total : N)
Moyenne : $\bar{x} = \dfrac{n_1 x_1 + n_2 x_2 + n_3 x_3 + \cdots}{N}$
Variance $V(x) = \dfrac{n_1 (x_1)^2 + n_2 (x_2)^2 + n_3 (x_3)^2 + \cdots}{N} - (\bar{x})^2$; Ecart type : $\sigma(x) = \sqrt{V(x)}$

► *Exemple :*

x_i	1	2	3	4	5
n_i	10	8	1	3	1

• $\bar{x} = \dfrac{10 \times 1 + 8 \times 2 + 1 \times 3 + 3 \times 4 + 1 \times 5}{10 + 8 + 1 + 3 + 5} = 2$

• $V(x) = \dfrac{10 \times 1^2 + 8 \times 2^2 + 1 \times 3^2 + 3 \times 4^2 + 1 \times 5^2}{10 + 8 + 1 + 3 + 5} - 2^2 = \dfrac{32}{23}$; $\sigma(x) = \sqrt{V(x)} \approx 1,18$

b) Séries statistiques doubles

Pour une série :

Caractère x_i	x_1	x_2	$\cdots$	x_n
Caractère y_i	y_1	y_2	$\cdots$	y_n

• **Point moyen** : $G\begin{pmatrix} \bar{x} \\ \bar{y} \end{pmatrix}$ ($\bar{x}$: moyenne des x_i ; $\bar{y}$: moyenne des y_i)

• **Covariance de x et y** : $C_{xy} = \dfrac{1}{n}(x_1 y_1 + x_2 y_2 + \cdots + x_n y_n) - \bar{x}\bar{y}$

• **Droite des moindres carrés** : $y = ax + b$ avec $a = \dfrac{C_{xy}}{V(x)}$ et $b = \bar{y} - a\bar{x}$

► *Exemple :*

x_i	1	2	3	4	5
y_i	8	9	12	12	14

• $\bar{x} = \dfrac{1+2+3+4+5}{5} = 3$; $\bar{y} = \dfrac{8+9+12+12+14}{5} = 11$; $G\begin{pmatrix} 3 \\ 11 \end{pmatrix}$

• Droite des moindres carrés : La calculatrice donne $a = 1,5$ et $b = 6,5$
TI :
Entrée des données : STAT $\longrightarrow$ Edit $\longrightarrow$ entrer les valeurs x_i dans L_1 et les valeurs y_i dans L_2
Calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ LinReg(ax+b) L_1 , L_2
CASIO :
Entrée des données : STAT $\longrightarrow$ entrer les valeurs x_i dans la liste 1 et les valeurs y_i dans la liste 2
Vérification du mode de calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ SET (par F6) $\longrightarrow$ List 1 doit être sélectionné dans 2VarXlist et List 2 doit être sélectionné dans 2VarYList
Calcul : STAT $\longrightarrow$ CALC $\longrightarrow$ REG $\longrightarrow$ X

Une équation de la droite des moindres carrés est donc : $y = 1,5x + 6,5$

• Estimation de la valeur de y pour $x = 7$: $y = 1,5 \times 7 + 6,5 = 17$

16. Suites arithmétiques et géométriques

a) Suites arithmétiques

On passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre a appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = U_n + a$; $U_n = U_0 + na$; $U_n = U_p + (n-p)a$
- Si pour tout n, $U_{n+1} - U_n =$ constante alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = (n-p+1) \times \dfrac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \dfrac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$

▶ *Exemple :*
Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $a = 3$.
$U_{10} = U_0 + 10a = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33a = 2 + 33 \times 3 = 101$
Pour tout n, $U_n = U_0 + na = 2 + 3n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_{10} = 11 \times \dfrac{2+32}{2} = 187$. *(attention : le nb de termes est égal à 11 pas à 10 !)*

b) Suites géométriques

On passe d'un terme au terme suivant en multipliant toujours par le même nombre b appelé raison de la suite.
- Pour tout n : $U_{n+1} = b \cdot U_n$; $U_n = b^n \cdot U_0$; $U_n = b^{n-p} \cdot U_p$
- Si pour tout n, $\frac{U_{n+1}}{U_n} =$ constante alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.
- $U_p + U_{p+1} + \cdots + U_n = U_p \times \dfrac{1 - b^{n-p+1}}{1-b} = \text{1er terme} \times \dfrac{1 - b^{\text{nb de termes}}}{1-b}$ (pour $b \neq 1$)

▶ *Exemple :*
Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.
$U_4 = b^4 \cdot U_0 = 2^4 \times 5 = 80$; $U_{10} = b^{10} \cdot U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$
Pour tout n, $U_n = b^n \cdot U_0 = 5 \cdot 2^n$.
$U_0 + U_1 + \cdots + U_8 = 5 \times \dfrac{1-2^9}{1-2} = 2555$. *(attention : le nb de termes est égal à 9 pas à 8 !)*

17. Pourcentages

Prendre x % d'une grandeur revient à la multiplier par $\frac{x}{100}$.

▶ *Exemple :* 5 % de 640 $= \frac{5}{100} \times 640 = 32$

La proportion en pourcentage d'une partie A par rapport à un total B est égale à : $\frac{A}{B} \times 100$ (en %).

▶ *Exemple :* La proportion en pourcentage de 18 par rapport à 120 est égale à 15%, car $\frac{18}{120} \times 100 = 15$.

Augmenter une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{x}{100}\right)$.
Diminuer une grandeur de x % revient à la multiplier par $\left(1 - \frac{x}{100}\right)$.

▶ *Exemples :*
- augmenter une valeur de 20 % revient à la multiplier par $\left(1 + \frac{20}{100}\right) = 1,2$.
- le prix d'un produit valant 15 euros après une baisse de 6 % est égal à $\left(1 - \frac{6}{100}\right) \times 15 = 0,94 \times 15 = 14,1$ euros.
- Diminuer une grandeur de 15 %, puis l'augmenter de 20 % revient à la multiplier par : $\left(1 - \frac{15}{100}\right) \times \left(1 + \frac{20}{100}\right) = 0,85 \times 1,2 = 1,02$.
(Rappel : les pourcentages ne s'ajoutent pas)

▶ *Remarque :*
- Si on augmente chaque année une valeur de x % , on utilise une suite géométrique de raison $1 + \frac{x}{100}$.
- Si on diminue chaque année une valeur de x % , on utilise une suite géométrique de raison $1 - \frac{x}{100}$.

Variation d'une grandeur en pourcentage $= \dfrac{\text{valeur finale} - \text{valeur initiale}}{\text{valeur initiale}} \times 100$.

▶ *Exemple :* Un produit passant de 64 à 72 euros subit une hausse de 12,5%, car $\frac{72-64}{64} \times 100 = 12,5$.