

Points et vecteurs dans un repère : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 :

Soit $\vec{u} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\vec{w} \begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\vec{u} + \vec{v}$; $\vec{u} - \vec{v}$; $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$; $\frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w}$; $3\vec{u} - 2\vec{v}$

Exercice 2 :

Déterminer si les vecteurs \vec{u} et \vec{v} sont colinéaires dans les cas suivants :

1) $\vec{u} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

3) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

2) $\vec{u} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$

4) $\vec{u} \begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\vec{v} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

On considère les points $A \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs : \vec{AB} , \vec{AC} , $3\vec{BC}$, $-2\vec{BC} + 3\vec{AD}$, $2\vec{DB} - \frac{1}{2}\vec{AB}$.

Exercice 4 :

On considère les points $A \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 5 :

On considère les points $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point M dans les cas suivants :

1) M est tel que $\vec{BM} = \vec{AB}$.

2) M est le milieu de $[AC]$.

3) $2\vec{AB} + 3\vec{CM} = \vec{0}$.

4) $ABCM$ est un parallélogramme.

Exercice 6 :

Déterminer si les points A , B et C sont alignés ou non dans les cas suivants :

1) $A \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $A \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $A \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C \begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

On considère les points $A \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $D \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

- 1) Calculer les coordonnées des points E et F tels que $\vec{BE} = \frac{1}{2}\vec{AB}$ et $\vec{AF} = 3\vec{AD}$
- 2) Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 8 :

Calculer la distance AB dans les cas suivants :

- 1) $A \begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$
 - 2) $A \begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$
 - 3) $A \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$; $B \begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$
-

Réponses exercice 1 :

$$\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} - \vec{v} \begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}; \quad \vec{u} + \vec{v} + \vec{w} \begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}; \quad \frac{1}{2}\vec{u} + \vec{w} \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}; \quad 3\vec{u} - 2\vec{v} \begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Réponses exercice 2 :

- 1) colinéaires
- 2) colinéaires
- 3) colinéaires
- 4) non colinéaires

Réponses exercice 3 :

$$\vec{AB} \begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}, \vec{AC} \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}, 3\vec{BC} \begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}, -2\vec{BC} + 3\vec{AD} \begin{pmatrix} -20 \\ 4 \end{pmatrix}, 2\vec{DB} - \frac{1}{2}\vec{AB} \begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$$

Réponses exercice 4 :

On cherche $D \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\vec{AD} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \vec{BC} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ (ou toute autre égalité de vecteurs possible). Après calcul, on obtient $D \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 5 :

- 1) $\vec{BM} \begin{pmatrix} x - \dots \\ y - \dots \end{pmatrix} = \vec{AB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$... On obtient $M \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$
 - 2) $M \begin{pmatrix} x_M = \frac{x_A + x_C}{2} \\ y_M = \frac{y_A + y_C}{2} \end{pmatrix}$... On obtient $M \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$
 - 3) $2\vec{AB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} + 3\vec{CM} \begin{pmatrix} 3(x - \dots) \\ 3(y - \dots) \end{pmatrix} = \vec{0} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$... On obtient $M \begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$
-

4) On cherche $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$ (ou toute autre égalité de vecteurs possible).

Après calcul, on obtient $M \begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 6 :

- 1) Les points A , B et C sont alignés.
- 2) Les points A , B et C ne sont pas alignés.
- 3) Les points A , B et C sont alignés.

Réponses exercice 7 :

1) $\overrightarrow{BE} \begin{pmatrix} x - \dots \\ y - \dots \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$... On obtient $E \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{AF} \begin{pmatrix} x - \dots \\ y - \dots \end{pmatrix} = 3 \overrightarrow{AD} \begin{pmatrix} \dots \\ \dots \end{pmatrix}$... On obtient $F \begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$

2) $\det(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}) = 0$. Les points C , E et F sont alignés.

Réponses exercice 8 :

- 1) $AB = 5$
- 2) $AB = \sqrt{17}$
- 3) $AB = \sqrt{2}$