

# Produit scalaire : Résumé de cours et méthodes

Le plan est muni d'un repère orthonormal.

## 1 Introduction

DÉFINITION

le produit scalaire de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  est le réel noté  $\vec{u} \cdot \vec{v}$  défini par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \frac{1}{2} (\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 - \|\vec{u}\|^2 - \|\vec{v}\|^2).$$

### 1-1 Produit scalaire et orthogonalité

PROPRIÉTÉ

Dire que deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux équivaut à dire que  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$

### 1-2 Règles de calcul

PROPRIÉTÉS

Pour tous vecteurs  $\vec{u}$ ,  $\vec{v}$  et  $\vec{w}$  :

- $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{v} \cdot \vec{u}$
- $\vec{0} \cdot \vec{u} = \vec{u} \cdot \vec{0} = 0$
- Pour tout réel  $k$ ,  $(k\vec{u}) \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot (k\vec{v}) = k \times (\vec{u} \cdot \vec{v})$
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w}) = \vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{u} \cdot \vec{w}$
- $\vec{u} \cdot \vec{u}$  est noté  $\vec{u}^2$  et est appelé carré scalaire de  $\vec{u}$
- $\vec{u}^2 = \|\vec{u}\|^2$  (carré de la longueur du vecteur  $\vec{u}$ )
- $(\vec{u} + \vec{v})^2 = \vec{u}^2 + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$  (cela signifie que  $(\vec{u} + \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u} \cdot \vec{u} + 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{v}$ )
- $(\vec{u} - \vec{v})^2 = \vec{u}^2 - 2\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v}^2$
- $(\vec{u} - \vec{v}) \cdot (\vec{u} + \vec{v}) = \vec{u}^2 - \vec{v}^2$

## 2 Produit scalaire et géométrie analytique

PROPRIÉTÉ

Si  $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = xx' + yy'$  et  $\vec{u}^2 = x^2 + y^2$

► Exemple : soit  $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$  et  $\vec{v} \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$ .

$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times 2 + (-1) \times 6 = 6 - 6 = 0$ . Les vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont orthogonaux.

### 2-1 Applications aux équations de droite

PROPRIÉTÉS

- Rappel : toute droite admet une équation (dite cartésienne) de la forme  $ax + by + c = 0$  (avec  $(a, b) \neq (0, 0)$ ) et  $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$  est un vecteur directeur de la droite.
- On appelle vecteur normal d'une droite tout vecteur  $\vec{n}$  non nul et orthogonal à un vecteur directeur de la droite.
- Si une droite admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$  alors  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de cette droite et, réciproquement, si une droite admet le vecteur  $\vec{n} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  comme vecteur normal alors elle admet une équation de la forme  $ax + by + c = 0$ .

► Exemple : Soit  $A \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \end{pmatrix}$ .

• Déterminons une équation de la médiatrice de  $[BC]$ .

Le vecteur  $\vec{BC} \begin{pmatrix} -2 \\ -8 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de la médiatrice qui admet donc une équation de la forme  $-2x - 8y + c = 0$ .

La médiatrice doit passer par  $I \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ , le milieu de  $[BC]$ .

On en déduit que  $-2 \times 0 - 8 \times (-1) + c = 0 \Leftrightarrow c = -8$ .

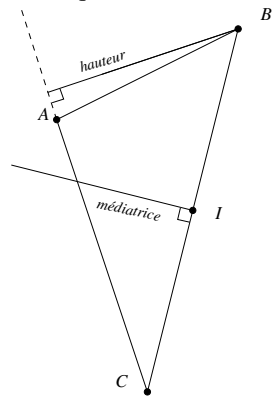
Une équation de la médiatrice est donc :  $-2x - 8y - 8 = 0$ .

• Déterminons une équation de la hauteur issue de  $B$  dans le triangle  $ABC$ .

Le vecteur  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 2 \\ -6 \end{pmatrix}$  est un vecteur normal de cette hauteur qui admet donc une équation de la forme  $2x - 6y + c = 0$ . La

hauteur passe par le point  $B$ . On en déduit que  $2 \times 1 - 6 \times 3 + c = 0 \Leftrightarrow c = 16$ .

Une équation de la hauteur est donc :  $2x - 6y + 16 = 0$ .



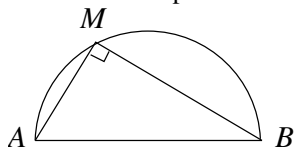
► **Remarque :** La droite  $D$  d'équation  $ax + by + c = 0$  est perpendiculaire à la droite  $D'$  d'équation  $a'x + b'y + c' = 0$  si et seulement si un vecteur directeur de  $D$  est orthogonal à un vecteur directeur de  $D'$ . Ainsi,  $D \perp D' \Leftrightarrow \vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \cdot \vec{u'} \begin{pmatrix} -b' \\ a' \end{pmatrix} = 0 \Leftrightarrow (-b) \times (-b') + a \times a' = 0 \Leftrightarrow aa' + bb' = 0$ .

## 2-2 Applications aux équations de cercle

Pour déterminer une équation du cercle de centre  $\Omega \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$  et de rayon  $R$ , il suffit d'exprimer qu'un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartient au cercle si et seulement si  $\Omega M^2 = R^2$ .  
Une équation est donc :  $(x - a)^2 + (y - b)^2 = R^2$ .

► Exemple : une équation du cercle de centre  $\Omega \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$  et de rayon 3 est :  $(x - 1)^2 + (y - 2)^2 = 9$ .

Pour déterminer une équation du cercle de diamètre  $[AB]$ , il suffit d'exprimer qu'un point  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartient au cercle si et seulement si le produit scalaire  $\vec{AM} \cdot \vec{BM}$  est nul.



► Exemple :  $M \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$  appartient au cercle de diamètre  $[AB]$  avec  $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$  et  $B \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$  si et seulement si  $\overrightarrow{AM} \begin{pmatrix} x-1 \\ y+2 \end{pmatrix}$ .

$\overrightarrow{BM} \begin{pmatrix} x-3 \\ y-4 \end{pmatrix} = 0$ . Cela équivaut à  $(x-1)(x-3) + (y+2)(y-4) = 0 \Leftrightarrow x^2 - x - 3x + 3 + y^2 - 4y + 2y - 8 = 0$ .

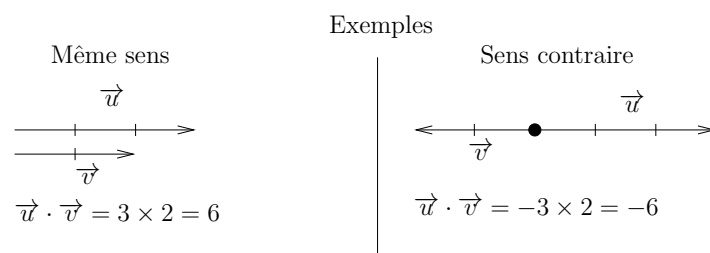
Une équation du cercle est donc :  $x^2 + y^2 - 4x - 2y - 5 = 0$ .

### 3 Produit scalaire et géométrie

#### 3-1 Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

PROPRIÉTÉ

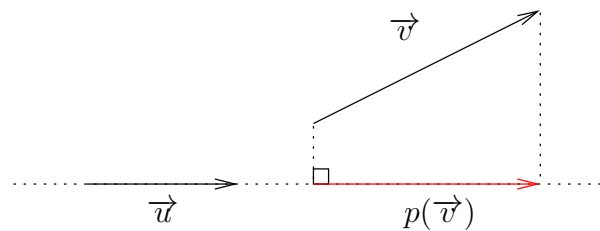
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et de même sens alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  (produit des longueurs)
- Si  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  sont non nuls et de sens contraires alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$  (opposé du produit des longueurs)
- Si  $\vec{u} = \vec{0}$  ou  $\vec{v} = \vec{0}$  alors  $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$



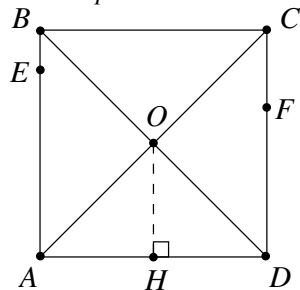
#### 3-2 Produit scalaire de deux vecteurs non colinéaires

PROPRIÉTÉ

Etant donné deux vecteurs non nuls  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$ .  
 Si on note  $p(\vec{v})$ , la projection orthogonale de  $\vec{v}$  sur une droite portant  $\vec{u}$ , alors on a :  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot p(\vec{v})$   
 (on est donc ramené au cas de deux vecteurs colinéaires)



► Exemple :  $ABCD$  est un carré avec  $AB = 3$



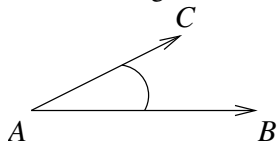
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AB} = 0$  car  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AB}$  sont orthogonaux.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{CB} = -3 \times 3 = -9$  car  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{CB}$  sont colinéaires et de sens contraires.
- $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AO} = \overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AH} = 3 \times 1,5 = 4,5$  car le projeté orthogonal de  $\overrightarrow{AO}$  sur  $(AD)$  est  $\overrightarrow{AH}$  et que  $\overrightarrow{AD}$  et  $\overrightarrow{AH}$  sont colinéaires et de même sens.
- Les produits scalaires  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{BD}$  et  $\overrightarrow{AD} \cdot \overrightarrow{EF}$  sont tous égaux entre eux. En effet, si on projette orthogonalement  $\overrightarrow{AC}$ ,  $\overrightarrow{BD}$

et  $\vec{EF}$  sur  $(AD)$  on obtient à chaque fois  $\vec{AD}$ . Donc tous ces produits scalaires sont égaux à  $\vec{AD} \cdot \vec{AD} = 3 \times 3 = 9$ .

## 4 Produit scalaire et angles

PROPRIÉTÉ

Dans un triangle  $ABC$ ,  $\vec{AB} \cdot \vec{AC} = AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$ .



► **Remarque :** De façon plus générale,  $\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}, \vec{v})$ .

► *Exemple :* Soit  $A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ ,  $B \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$  et  $C \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$ .

$\vec{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$  et  $AB = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}$ .  $\vec{AC} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}$  et  $AC = \sqrt{1^2 + 3^2} = \sqrt{10}$ .

$\vec{AB} \cdot \vec{AC} = 2 \times 1 + 1 \times 3 = 5$ , donc  $\cos \widehat{BAC} = \frac{\vec{AB} \cdot \vec{AC}}{AB \times AC} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5} \times \sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ . On peut en déduire que la mesure en radians de l'angle géométrique  $\widehat{BAC}$  est égale à  $\frac{\pi}{4}$ .

PROPRIÉTÉ

**Théorème d'Al Kashi**

Dans un triangle  $ABC$ ,  $BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2AB \times AC \times \cos \widehat{BAC}$