

# Variations d'une fonction : Résumé de cours et méthodes

## 1 Méthode générale d'étude des variations d'une fonction :

Pour étudier les variations d'une fonction  $f$  sur un intervalle  $I$  :

- Dériver la fonction  $f$ .
- Factoriser si possible la dérivée  $f'$  afin de l'exprimer sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré.
- Étudier le signe de chaque terme de  $f'(x)$  sur l'intervalle  $I$ . En déduire le signe de  $f'(x)$  à l'aide d'un tableau de signes.
- Dresser le tableau de variations de  $f$  sur  $I$  en utilisant la propriété suivante :

PROPRIÉTÉ

$f$  étant dérivable sur  $I$ , pour tout intervalle  $J$  inclus dans  $I$  :

- Si  $f'(x) > 0$ , pour tout  $x$  de  $J$ , alors  $f$  est strictement croissante sur  $J$ .  
(symbolisé par une flèche  $\nearrow$  dans le tableau de variations)
- Si  $f'(x) < 0$ , pour tout  $x$  de  $J$ , alors  $f$  est strictement décroissante sur  $J$ .  
(symbolisé par une flèche  $\searrow$  dans le tableau de variations)
- Si  $f'(x) = 0$ , pour tout  $x$  de  $J$ , alors  $f$  est constante sur  $J$ .  
(symbolisé par une flèche  $\longrightarrow$  dans le tableau de variations)

**Remarque :** On utilise généralement un seul tableau pour l'étude du signe de la dérivée et les variations de  $f$ . (voir exemples)

## 2 Rappels sur les études de signe :

Pour étudier le signe de  $f'(x)$ , on factorise si possible  $f'(x)$  sous la forme d'un produit ou d'un quotient d'expressions du premier ou du second degré dont on sait étudier le signe grâce aux règles suivantes :

- **Signe de  $ax + b$**  ( $a \neq 0$ )

On détermine la valeur de  $x$  qui annule  $ax + b$ , puis on applique la règle : "signe de  $a$  après le 0".

x	$-\infty$	$-b/a$	$+\infty$
$ax+b$	signe de $(-a) \oplus$ signe de $a$		

- **Signe de  $ax^2 + bx + c$**  ( $a \neq 0$ ) : on calcule la discriminant  $\Delta = b^2 - 4ac$  (sauf cas évidents)  
- Si  $\Delta < 0$ , on applique la règle : "toujours du signe de  $a$ ".

x	$-\infty$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	Signe de $a$	

- Si  $\Delta = 0$ , on calcule la racine double :  $x_1 = -\frac{b}{2a}$ .

On applique alors la règle : "toujours du signe de  $a$  et s'annule pour  $x = x_1$ ".

x	$-\infty$	$x_1$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	Signe de $a$	$\oplus$	Signe de $a$

- Si  $\Delta > 0$ , on calcule les deux racines :  $x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$  et  $x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ .

On applique alors la règle : "signe de  $a$  à l'extérieur des racines".

x	$-\infty$	$x_1$	$x_2$	$+\infty$
$ax^2+bx+c$	Signe de $a$	$\oplus$	Signe de $(-a)$	$\oplus$ Signe de $a$

(on suppose que  $x_1 < x_2$ )

### 3 Exemples d'étude des variations d'une fonction :

• **Exemple 1 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = x^2 - 6x + 1$ .

- Dérivée :  $f'(x) = 2x - 6$

- Etude du signe de la dérivée :  $2x - 6$  est du premier degré et s'annule pour  $x = 3$ .

On applique la règle "signe de  $a = 2$  après le 0" (donc + après le 0).

- Tableau de variations :

x	$-\infty$	3	$+\infty$
$f'(x)$	-	0	+
$f(x)$			

Le tableau a été complété par le calcul de  $f(3)$  :  $f(3) = 3^2 - 6 \cdot 3 + 1 = -8$ .

• **Exemple 2 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = -x^3 - x^2 + x + 1$ .

- Dérivée :  $f'(x) = -3x^2 - 2x + 1$

- Etude du signe de la dérivée :  $-3x^2 - 2x + 1$  est du second degré.

Calcul du discriminant :  $\Delta = b^2 - 4ac = (-2)^2 - 4(-3)(1) = 16 > 0$ .

On applique donc la règle "signe de  $a = -3$  (donc -) à l'extérieur des racines".

Calcul des racines :

$$x_1 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) - 4}{-6} = \frac{1}{3} \text{ et } x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-(-2) + 4}{-6} = -1$$

- Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1/3	$+\infty$	
$f'(x)$	-	0	+	0	-
$f(x)$					

Le tableau a été complété par le calcul de  $f(-1)$  et  $f\left(\frac{1}{3}\right)$  :

$$f(-1) = -(-1)^3 - (-1)^2 - 1 + 1 = 1 - 1 - 1 + 1 = 0$$

$$f\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right)^3 - \left(\frac{1}{3}\right)^2 + \frac{1}{3} + 1 = -\frac{1}{27} - \frac{3}{27} + \frac{9}{27} + \frac{27}{27} = \frac{32}{27}$$

• **Exemple 3 :**

Soit  $f$  la fonction définie sur  $\mathbb{R}$  par  $f(x) = \frac{x}{x^2 + 1}$ .

- Dérivée :  $f'(x) = \frac{1(x^2 + 1) - x(2x)}{(x^2 + 1)^2} = \frac{1 - x^2}{(x^2 + 1)^2}$

D'où,  $f'(x) = \frac{(1-x)(1+x)}{(x^2 + 1)^2}$  (on factorise)

- Etude du signe de la dérivée :

$(1-x)$  est du premier degré et s'annule pour  $x = 1$ . On applique la règle "signe de  $a = -1$  après le 0" (donc - après le 0).

$(1+x)$  est du premier degré et s'annule pour  $x = -1$ . On applique la règle "signe de  $a = 1$  après le 0" (donc + après le 0).

$(x^2 + 1)^2$  a un "signe évident" car un carré est toujours positif.

- Tableau de variations :

x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$
$1-x$	+		0	-
$1+x$	-	0		+
$(x^2+1)^2$	+			+
$f'(x)$	-	0	0	-
f(x)				

Le tableau a été complété par le calcul de  $f(-1)$  et  $f(1)$  :

$$f(-1) = \frac{-1}{(-1)^2+1} = -\frac{1}{2}$$

$$f(1) = \frac{1}{1^2+1} = \frac{1}{2}$$