

Dérivation : Résumé de cours et méthodes

1 Nombre dérivé - Fonction dérivée :

DÉFINITION

- Etant donné f est une fonction définie sur un intervalle I contenant le réel a , f est dérivable en a si $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h}$ existe et est égale à un réel que l'on appelle alors nombre dérivé de f en a et que l'on note $f'(a)$.
- Si f est dérivable pour tous les éléments de I , on dit que f est dérivable sur I et on appelle dérivée de f la fonction, notée f' , qui à tout a de I associe $f'(a)$, le nombre dérivé de f en a .

Exemple : Soit f définie sur \mathbb{R} par $f(x) = x^2$.

Pour tout a , $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{(a+h)^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{a^2 + 2ah + h^2 - a^2}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} 2a + h = 2a$. f est donc dérivable en a et $f'(a) = 2a$.

On dit que f est dérivable sur \mathbb{R} et que sa fonction dérivée est définie par $f'(x) = 2x$.

2 Dérivées des fonctions usuelles :

Fonction	Fonction dérivée	pour tout x de	Exemples
$f(x) = a$	$f'(x) = 0$	\mathbb{R}	$f(x) = 3 \Rightarrow f'(x) = 0$
$f(x) = ax + b$	$f'(x) = a$	\mathbb{R}	$f(x) = x \Rightarrow f'(x) = 1$ $f(x) = 2x - 4 \Rightarrow f'(x) = 2$
$f(x) = x^n$ (n entier ≥ 2)	$f'(x) = nx^{n-1}$	\mathbb{R}	$f(x) = x^2 \Rightarrow f'(x) = 2x$ $f(x) = x^3 \Rightarrow f'(x) = 3x^2$
$f(x) = \frac{1}{x}$	$f'(x) = -\frac{1}{x^2}$	\mathbb{R}^*	
$f(x) = \frac{1}{x^n}$ (n entier ≥ 2)	$f'(x) = -\frac{n}{x^{n+1}}$	\mathbb{R}^*	$f(x) = \frac{1}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{2}{x^3}$ $f(x) = \frac{1}{x^3} \Rightarrow f'(x) = -\frac{3}{x^4}$
$f(x) = \sqrt{x}$	$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$	$]0; +\infty[$	
$f(x) = \sin x$	$f'(x) = \cos x$	\mathbb{R}	
$f(x) = \cos x$	$f'(x) = -\sin x$	\mathbb{R}	

3 Etude forme par forme des opérations sur les fonctions dérivables :

Avertissement : Nous utiliserons par souci de simplification le traditionnel et affreux abus de langage qui consiste par exemple à dire que la dérivée de x^2 est égale à $2x$ (alors que nous devrions dire en fait que la dérivée de la fonction qui à x associe x^2 est la fonction qui à x associe $2x$).

Il ne faut jamais oublier que l'on ne doit pas confondre une **fonction** f avec $f(x)$ (l'image de x par f qui est un **réel**) et que la dérivée f' est elle-même une **fonction** qui à tout x associe $f'(x)$ (le nombre dérivé de f en x , qui est un **réel**).

Toujours par souci de simplification, nous ne nous précisons pas dans les exemples les intervalles où les fonctions sont dérivables afin de nous concentrer sur l'utilisation des formules.

3-1 Forme $f + g$

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction $f + g$ est aussi dérivable sur I et $(f + g)' = f' + g'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2 + x$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x}$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^3 + 4x$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} + \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x}$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{x} + \frac{1}{x}$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} + \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}}$$

3-2 Forme kf (k réel)

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I et si k est un réel alors la fonction kf est aussi dérivable sur I et $(kf)' = kf'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 3x^2$ est définie par :

$$f'(x) = 3 \times \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} = 6x$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = -5x^3$ est définie par :

$$f'(x) = -5 \times \underbrace{3x^2}_{\text{dérivée de } x^3} = -15x^2$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2}{x} = 2 \times \frac{1}{x}$ est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{\frac{(-1)}{x^2}}_{\text{dérivée de } \frac{1}{x}} = -\frac{2}{x^2}$$

3-3 Forme fg

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I alors la fonction fg est aussi dérivable sur I et $(fg)' = f'g + fg'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x\sqrt{x}$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{1}_{\text{dérivée de } x} \times \sqrt{x} + x \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}}$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2(3 + \sqrt{x})$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} \times (3 + \sqrt{x}) + x^2 \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } 3 + \sqrt{x}}$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = x^2 \times \sin x$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2} \times \sin x + x^2 \times \underbrace{\cos x}_{\text{dérivée de } \sin x}$$

3-4 Forme f^2

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I alors la fonction f^2 est aussi dérivable sur I et $(f^2)' = 2ff'$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (3x + 1)^2$ est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{3}_{\text{dérivée de } 3x+1} \times (3x + 1) = 6(3x + 1)$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (x^3 + 4x)^2$ est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{(3x^2 + 4)}_{\text{dérivée de } x^3+4x} \times (x^3 + 4x)$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (\cos x)^2$ est définie par :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{(-\sin x)}_{\text{dérivée de } \cos x} \times (\cos x) = -2 \times \sin x \times \cos x$$

3-5 Forme $\frac{1}{f}$

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction dérivable sur un intervalle I (où $f(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\frac{1}{f}$ est aussi dérivable sur I et

$$\left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}.$$

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{5x-1}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{5}_{\text{dérivée de } 5x-1}}{(5x-1)^2}$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{x^2+3}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{2x}_{\text{dérivée de } x^2+3}}{(x^2+3)^2}$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{\sin x}$ est définie par :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{\cos x}_{\text{dérivée de } \sin x}}{(\sin x)^2}$$

3-6 Forme $\frac{f}{g}$

PROPRIÉTÉ

Si f et g sont deux fonctions dérivables sur un intervalle I (où $g(x)$ ne s'annule pas) alors la fonction $\frac{f}{g}$ est aussi dérivable sur I et $\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2}$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{7x}{2x+3}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(7)}^{\text{dérivée de } 7x} \times (2x+3) - (7x) \times \overbrace{(2)}^{\text{dérivée de } 2x+3}}{(2x+3)^2} = \frac{14x+21-14x}{(2x+3)^2} = \frac{21}{(2x+3)^2}$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{x^2}{3x+1}$ est définie par :

$$f'(x) = \frac{\overbrace{(2x)}^{\text{dérivée de } x^2} \times (3x+1) - (x^2) \times \overbrace{(3)}^{\text{dérivée de } 3x+1}}{(3x+1)^2} = \frac{6x^2+2x-3x^2}{(3x+1)^2} = \frac{3x^2+2x}{(3x+1)^2}$$

3-7 Forme $f(ax+b)$ (a et b réels)

PROPRIÉTÉ

Soit f définie sur un intervalle I , a et b deux réels et J un intervalle tel que, pour tout x de J , $ax+b \in I$. Si f est dérivable sur I alors la fonction g définie par $g(x) = f(ax+b)$ est dérivable sur J et $g'(x) = a \times f'(ax+b)$.

Exemples de fonctionnement de cette formule :

- 1) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (4x+5)^3$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{4}_{\text{dérivée de } 4x+5} \times \underbrace{3(4x+5)^2}_{\text{on dérive comme } x^3 \text{ mais avec } 4x+5} = 12(4x+5)^2$$

- 2) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sqrt{3x+1}$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{3}_{\text{dérivée de } 3x+1} \times \frac{1}{\underbrace{2\sqrt{3x+1}}_{\text{on dérive comme } \sqrt{x} \text{ mais avec } 3x+1}} = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}$$

- 3) La dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \sin(-2x)$ est définie par :

$$f'(x) = \underbrace{-2}_{\text{dérivée de } -2x} \times \underbrace{\cos(-2x)}_{\text{on dérive comme } \sin.x \text{ mais avec } -2x} = -2\cos(-2x)$$

4 Tableau récapitulatif des opérations sur les fonctions dérivables :

Fonction	Fonction dérivée
$f + g$	$f' + g'$
kf ($k \in \mathbb{R}$)	kf'
fg	$f'g + fg'$
f^2	$2f'f$
$\frac{1}{f}$	$-\frac{f'}{f^2}$
$\frac{f}{g}$	$\frac{f'g - fg'}{g^2}$
$x \mapsto f(ax + b)$ (a et b réels)	$x \mapsto a \times f'(ax + b)$

5 Exemples de dérivation nécessitant l'utilisation de plusieurs formes :

La première chose à faire avant de dériver une fonction est de déterminer sa structure (somme, produit, quotient ...) afin de déterminer quelles sont les formes à utiliser.

Exemples :

- 1) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = 2x^3 + 5x^2 + 7x - 5$:

La fonction se présente d'abord comme une somme de termes, on utilise donc la forme $f + g$ (de dérivée $f' + g'$) et pour dériver $2x^3$ et $5x^2$ on utilise la forme kf . Ce qui donne :

$$f'(x) = 2 \times \underbrace{(3x^2)}_{\text{dérivée de } x^3} + 5 \times \underbrace{(2x)}_{\text{dérivée de } x^2} + \underbrace{(7)}_{\text{dérivée de } 7x-5} = 6x^2 + 10x + 7$$

- 2) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = (8x^2 + 5)\sqrt{x}$:

La fonction se présente sous la forme d'un produit, on utilise donc la forme fg (de dérivée $f'g + fg'$). La dérivée de $8x^2$ (forme kf) est égale à $8 \times$ (dérivée de x^2) = $8 \times (2x) = 16x$. La dérivée de 5 est elle égale à 0. Donc la dérivée de $8x^2 + 5$ est égale à $16x$.

D'où le résultat final :

$$f'(x) = \underbrace{16x}_{\text{dérivée de } 8x^2+5} \times \sqrt{x} + (8x^2 + 5) \times \underbrace{\frac{1}{2\sqrt{x}}}_{\text{dérivée de } \sqrt{x}} = 16x\sqrt{x} + \frac{8x^2 + 5}{2\sqrt{x}}$$

- 3) Dérivée de la fonction f définie par $f(x) = \frac{1}{4 - 7x^2}$:

La fonction se présente sous la forme d'un inverse, on va donc utiliser la forme $\frac{1}{f}$ (de dérivée $-\frac{f'}{f^2}$). On aura donc besoin

de la dérivée de $4 - 7x^2$:

La dérivée de $-7x^2$ (forme kf) est égale à $-7 \times$ (dérivée de x^2) = $-7 \times (2x) = -14x$. La dérivée de 4 étant nulle, la dérivée de $4 - 7x^2$ sera donc égale à $-14x$.

D'où le résultat final :

$$f'(x) = -\frac{\underbrace{(-14x)}_{\text{dérivée de } 4-7x^2}}{(4 - 7x^2)^2} = \frac{14x}{(4 - 7x^2)^2}$$

6 Calcul d'une équation de la tangente à une courbe en un point :

DÉFINITION

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a , alors la tangente à la courbe de f au point d'abscisse a est la droite passant par le point $A(a, f(a))$ et dont le coefficient directeur est égal à $f'(a)$.

PROPRIÉTÉ

Si f est une fonction définie et dérivable sur un intervalle I contenant le réel a , alors une équation de la tangente à la courbe représentative de f au point d'abscisse a est :
 $y = f(a) + f'(a)(x - a)$.

Exemples :

- 1) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = x^2 - 3x + 1$ au point d'abscisse 2 .

Une équation de T est : $y = f(2) + f'(2)(x - 2)$

- on calcule d'abord $f(2)$: $f(2) = 2^2 - 3 \times 2 + 1 = 4 - 6 + 1 = -1$.

- on dérive f : $f'(x) = 2x - 3$.

- on en déduit la valeur de $f'(2)$: $f'(2) = 2 \times 2 - 3 = 1$.

Une équation de T est donc : $y = -1 + 1 \times (x - 2) \Leftrightarrow y = x - 3$

- 2) Soit T la tangente à la courbe représentative de la fonction f définie par $f(x) = \frac{2x-1}{x+3}$ au point d'abscisse -1 .

Une équation de T est : $y = f(-1) + f'(-1)(x - (-1)) \Leftrightarrow y = f(-1) + f'(-1)(x + 1)$

- on calcule d'abord $f(-1)$: $f(-1) = \frac{2(-1)-1}{-1+3} = -\frac{3}{2}$.

- on dérive f : $f'(x) = \frac{2 \times (x+3) - (2x-1) \times 1}{(x+3)^2} = \frac{2x+6-2x+1}{(x+3)^2} = \frac{7}{(x+3)^2}$.

- on en déduit la valeur de $f'(-1)$: $f'(-1) = \frac{7}{(-1+3)^2} = \frac{7}{4}$.

Une équation de T est donc : $y = -\frac{3}{2} + \frac{7}{4}(x + 1) \Leftrightarrow y = -\frac{6}{4} + \frac{7}{4}x + \frac{7}{4} \Leftrightarrow y = \frac{7}{4}x + \frac{1}{4}$