Dérivation : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Dériver la fonction f dans les cas suivants :

1) $f(x) = -4x^3 + 2x^2 - 3x + 1$

2) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x}{2}$

3) $f(x) = (\sqrt{x} + 1) \times (x^2 - 2)$

4) $f(x) = (2x - \sqrt{x}) \times (x + 4)$

5) $f(x) = \dfrac{1}{1 - 4x}$

6) $f(x) = \dfrac{-3}{2x - 1}$

7) $f(x) = \dfrac{2x - 1}{3x + 2}$

8) $f(x) = \dfrac{3x^2 - 4x + 1}{2x - 3}$

9) $f(x) = (-5x^2 + 1)^2$

Exercice 2 :

Déterminer une équation de la tangente T à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse a dans les cas suivants :

1) $f(x) = 3x^2 - x + 1$ avec $a = 1$.

2) $f(x) = \dfrac{2x + 1}{x - 2}$ avec $a = 3$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x}$ avec $a = 9$.

Exercice 3 :

Soit f la fonction définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = \dfrac{-x^2 + 2x - 1}{x}$.
On note C sa courbe représentative dans un repère orthonormé.

1) Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est horizontale.

2) Existe t-il des points de la courbe C où la tangente admet un coefficient directeur égal à -2 ?

3) Déterminer les abscisses des points de la courbe C où la tangente est parallèle à la droite d'équation $y = -\dfrac{2}{3}x - 5$.

Réponses exercice 1 :

1) $f'(x) = -12x^2 + 4x - 3$

2) $f(x) = \dfrac{1}{2} \times (3x^2 - 4x)$; $f'(x) = \dfrac{1}{2} \times (6x - 4) = 3x - 2$

3) $f'(x) = \dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times (x^2 - 2) + (\sqrt{x} + 1) \times (2x)$ (forme fg)

4) $f'(x) = \left(2 - \dfrac{1}{2\sqrt{x}}\right) \times (x+4) + (2x - \sqrt{x}) \times 1$ (forme fg)

5) $f'(x) = -\dfrac{(-4)}{(1-4x)^2} = \dfrac{4}{(1-4x)^2}$ (forme $\dfrac{1}{f}$)

6) $f(x) = -3 \times \dfrac{1}{2x-1}$; $f'(x) = -3 \times \dfrac{(-2)}{(2x-1)^2} = \dfrac{6}{(2x-1)^2}$ (forme $\dfrac{1}{f}$)

7) $f'(x) = \dfrac{2 \times (3x+2) - (2x-1) \times 3}{(3x+2)^2} = \cdots = \dfrac{7}{(3x+2)^2}$ (forme $\dfrac{f}{g}$)

8) $f'(x) = \dfrac{(6x-4)(2x-3) - 2(3x^2-4x+1)}{(2x-3)^2} = \cdots = \dfrac{6x^2-18x+10}{(2x-3)^2}$ (forme $\dfrac{f}{g}$)

9) $f'(x) = 2 \times (-10x) \times (-5x^2+1) = -20x(-5x^2+1)$ (forme f^2)

Réponses exercice 2 :

1) $T : y = f(1) + f'(1)(x-1)$; $f(1) = 3$; $f'(x) = 6x - 1$; $f'(1) = 5$; $T : y = 5x - 2$

2) $T : y = f(3) + f'(3)(x-3)$; $f(3) = 7$; $f'(x) = \dfrac{-5}{(x-2)^2}$; $f'(3) = -5$; $T : y = -5x + 22$

3) $T : y = f(9) + f'(9)(x-9)$; $f(9) = \dfrac{1}{3}$; $f'(x) = \dfrac{\dfrac{1}{2\sqrt{x}} \times x - \sqrt{x}}{x^2} = \dfrac{-1}{2x\sqrt{x}}$; $f'(9) = \dfrac{-1}{54}$; $T : y = \dfrac{-1}{54}x + \dfrac{1}{2}$

Réponses exercice 3 :

Rappel : le coefficient directeur de la tangente au point d'abscisse a est égal à $f'(a)$.

La dérivée de f est définie par : $f'(x) = \dfrac{(-2x+2)x - (-x^2+2x-1)}{x^2} = \dfrac{-x^2+1}{x^2}$.

1) La tangente est horizontale si et seulement si son coefficient directeur est nul.
On résoud donc l'équation $f'(x) = 0$. On obtient $x = 1$ ou $x = -1$.

2) Cela revient à résoudre l'équation $f'(x) = -2$ qui n'admet pas de solutions. Il n'y a donc pas de points répondant à la question.

3) Les coefficients directeurs de la tangente et de la droite doivent être égaux.
Cela revient donc à résoudre l'équation $f'(x) = -\dfrac{2}{3}$. Le calcul donne $x = \sqrt{3}$ ou $x = -\sqrt{3}$.