

Équations : Résumé de cours et méthodes

Principe général

Résoudre une équation dans l'ensemble des réels, c'est trouver toutes les valeurs de l'inconnue qui vérifient l'égalité formant l'équation, c'est à dire donner l'ensemble des solutions (noté en général S).

1 Équations de la forme $ax + b = 0$

Si $a \neq 0$, l'équation $ax + b = 0$ équivaut à $ax = -b$, c'est à dire à $x = -\frac{b}{a}$.

Exemple : $-3x + 4 = 0 \Leftrightarrow -3x = -4 \Leftrightarrow x = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}$.

On écrit que $S = \left\{ \frac{4}{3} \right\}$.

2 Équations sans inconnues au dénominateur

Méthode générale :

- se ramener à 0 en transposant tout dans le premier membre
- factoriser le premier membre afin de le transformer en produit de facteurs du premier degré
- utiliser que $A \times B = 0 \Leftrightarrow A = 0$ ou $B = 0$

Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $2x^2 = x$.

On se ramène à 0 : $2x^2 - x = 0$.

On factorise le premier membre : $x(2x - 1) = 0$.

On a donc $x = 0$ ou $2x - 1 = 0 \Leftrightarrow 2x = 1 \Leftrightarrow x = \frac{1}{2}$.

D'où, $S = \left\{ 0; \frac{1}{2} \right\}$

3 Équations avec l'inconnue au dénominateur

Méthode générale :

- déterminer les **valeurs interdites**, c'est à dire les valeurs de l'inconnue qui annulent le(s) dénominateur(s).
- utiliser le «produit en croix» : $\frac{A}{B} = \frac{C}{D} \Leftrightarrow A \times D = B \times C$ (avec $B \neq 0$ et $D \neq 0$)
- OU se ramener à 0 (en transposant tout dans le premier membre), puis en réduisant ce premier membre sous le même dénominateur.
On utilise alors que $\frac{A}{B} = 0 \Leftrightarrow A = 0$ (avec $B \neq 0$)
- vérifier que les valeurs trouvées ne sont pas des valeurs interdites.

Exemple : Résolution dans l'ensemble des réels de $\frac{x-3}{x-12} = \frac{-3}{x}$.

Les deux dénominateurs $x - 12$ et x s'annulent pour $x = 12$ et $x = 0$. Les deux valeurs interdites sont donc 0 et 12.

Le produit en croix donne : $x(x-3) = -3(x-12)$.

On se ramène à 0 : $x(x-3) + 3(x-12) = 0$.

On ne reconnaît aucun facteur commun ou différence de deux carrés. On développe donc pour simplifier le premier membre.

Il vient, $x^2 - 3x + 3x - 36 = 0 \Leftrightarrow x^2 - 36 = 0$.

On reconnaît une différence de deux carrés, il reste : $(x-6)(x+6) = 0$.

Ce qui donne $x - 6 = 0$ ou $x + 6 = 0$. Ainsi, on a $x = 6$ ou $x = -6$ qui ne sont pas des valeurs interdites. Donc, $S = \{6; -6\}$

4 Équations simples avec des valeurs absolues

Méthode générale : on utilise les propriétés suivantes

- Si $a \geq 0$, $|x| = a \Leftrightarrow x = a$ ou $x = -a$
- $|x| = |y| \Leftrightarrow x = y$ ou $x = -y$

Exemple 1 :

$$|3x - 4| = 2 \Leftrightarrow 3x - 4 = 2 \text{ ou } 3x - 4 = -2 \Leftrightarrow 3x = 6 \text{ ou } 3x = 2 \Leftrightarrow x = 2 \text{ ou } x = \frac{2}{3}.$$

$$S = \left\{ 2; \frac{2}{3} \right\}.$$

Exemple 2 :

$$|2x + 3| = |x| \Leftrightarrow 2x + 3 = x \text{ ou } 2x + 3 = -x \Leftrightarrow x + 3 = 0 \text{ ou } 3x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = -3 \text{ ou } x = -1.$$

$$S = \{-3; -1\}.$$

5 Cas des équations où l'inconnue s'élimine

- Si l'égalité qui reste est vraie alors tous les réels sont solutions. On écrit que $S = \mathbb{R}$.
- Si l'égalité qui reste est fausse alors l'équation n'admet aucune solution. On écrit que $S = \emptyset$.

Exemple : $3(x + 1) - 2x = x \Leftrightarrow 3x + 3 - 2x - x = 0 \Leftrightarrow 3 = 0.$

On obtient une égalité fausse, $S = \emptyset$