Systèmes linéaires : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} 2x-5y=-8 \\ x+7y=15 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} 10x+4y=3 \\ -5x+20y=4 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x+3y=5 \\ \frac{2}{3}x+y=-1 \end{cases}$

4) $\begin{cases} 4x-y=21 \\ 3x+2y=13 \end{cases}$ 5) $\begin{cases} 4x+y=5 \\ 6x-2y=-3 \end{cases}$

Exercice 2 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^2$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} \frac{1}{x}+\frac{2}{y}=5 \\ \frac{3}{x}-\frac{1}{y}=1 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} \frac{2}{x+1}+\frac{3}{y-1}=5 \\ \frac{1}{x+1}+\frac{1}{y-1}=1 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} x^2-y^2=96 \\ x^2-5y^2=-4 \end{cases}$

Exercice 3 :

Résoudre dans $\mathbb{R}^3$ les systèmes suivants :

1) $\begin{cases} x-4y+z=-2 \\ 3y-z=3 \\ 3z=9 \end{cases}$ 2) $\begin{cases} x+10y-3z=5 \\ 2x-y+2z=2 \\ -x+y+z=-3 \end{cases}$ 3) $\begin{cases} 2x-y+2z=-6 \\ x+2y-z=8 \\ -x+3y+4z=-7 \end{cases}$

Exercice 4 :

Calculer les côtés d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la largeur de 3 mètres et si l'on diminue d'autant la longueur, l'aire ne change pas ; mais si augmentant la largeur de 5 mètres, on diminue la longueur de 3 mètres, l'aire augmente de 16 m^2 .

Réponses exercice 1 :

1) $\Delta=19$. $\begin{matrix} 7L_1+5L_2 \\ L_1-2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $S=\{(1;2)\}$.

2) $\Delta=220$. $\begin{matrix} 5L_1-L_2 \\ L_1+2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $S=\left\{\left(\frac{1}{5};\frac{1}{4}\right)\right\}$.

3) $\Delta=0$. $\begin{matrix} \frac{2}{3}L_1 \\ 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $S=\varnothing$ (les deux équations ne sont pas équivalentes).

4) $\Delta=11$. $\begin{matrix} 2L_1+L_2 \\ 3L_1-4L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $S=\{(5;-1)\}$.

5) $\Delta=-14$. $\begin{matrix} 2L_1+L_2 \\ 3L_1-2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $S=\left\{\left(\frac{1}{2};3\right)\right\}$.

Réponses exercice 2 :

Ce sont des systèmes nécessitant un changement d'inconnues.
1) On pose $X = \frac{1}{x}$ et $Y = \frac{1}{y}$.

$\begin{cases} X+2Y=5 \\ 3X-Y=1 \end{cases}$ $\Delta = -7$. $\begin{matrix} L_1+2L_2 \\ 3L_1-L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $X = 1$ et $Y = 2$.

D'où $x = 1$ et $y = \frac{1}{2}$. $S = \left\{\left(1; \frac{1}{2}\right)\right\}$.

2) On pose $X = \frac{1}{x+1}$ et $Y = \frac{1}{y-1}$.

$\begin{cases} 2X+3Y=5 \\ X+Y=1 \end{cases}$ $\Delta = -1$. $\begin{matrix} L_1-3L_2 \\ L_1-2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $X = -2$ et $Y = 3$.

D'où $x = -\frac{3}{2}$ et $y = \frac{4}{3}$. $S = \left\{\left(-\frac{3}{2}; \frac{4}{3}\right)\right\}$.

2) On pose $X = x^2$ et $Y = y^2$.

$\begin{cases} X-Y=96 \\ X-5Y=-4 \end{cases}$ $\Delta = -4$. $\begin{matrix} 5L_1-L_2 \\ L_1-L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases}$. $X = 121$ et $Y = 25$.

D'où $x = 11$ ou $x = -11$; $y = 5$ ou $y = -5$. $S = \{(11;5) ; (11;-5) ; (-11;5) ; (-11;-5)\}$.

Réponses exercice 3 :

1) Le système est déja triangulaire :
$L_3 \longrightarrow z = 3$.
$L_2 \longrightarrow y = 2$.
$L_1 \longrightarrow x = 3$.
$S = \{(3,2,3)\}$

2)

$$\begin{matrix} L_1 \\ 2L_1-L_2 \\ L_1+L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+10y-3z=5 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 11L_2-21L_3 \end{matrix} \begin{cases} x+10y-3z=5 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire. $S = \{(2,0,-1)\}$

3)

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_1-2L_2 \\ L_1+2L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x-y+2z=-6 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_2+L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x-y+2z=-6 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire. $S = \{(1,2,-3)\}$

Réponses exercice 4 :

Soient x la largeur et y la longueur du rectangle.

On a : $\begin{cases} (x+3)(y-3) = xy \\ (x+5)(y-3) = xy+16 \end{cases}$

En développant et en simplifiant les équations, on obtient : $\begin{cases} -3x+3y-9=0 \\ -3x+5y-31=0 \end{cases}$.

La résolution du système donne $x = 8$ et $y = 11$.