

Systèmes linéaires : Résumé de cours et méthodes

1 Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues - Déterminant et nombre de solutions

On considère le système :
$$\begin{cases} L_1 & ax + by = c \\ L_2 & a'x + b'y = c' \end{cases}$$

(x et y sont les inconnues, L_1 et L_2 désignent les deux équations formant le système)

Résoudre ce système, c'est déterminer l'ensemble S des couples (x, y) vérifiant les deux équations simultanément.

On appelle **déterminant** du système le réel Δ défini par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

• Si $\Delta \neq 0$, le système admet un unique couple solution.

(voir le paragraphe suivant pour la recherche de ce couple solution)

• Si $\Delta = 0$, le système admet une infinité de solutions si les deux équations sont équivalentes et aucune solution dans le cas contraire.

► **Remarque** : Quand $\Delta = 0$, on peut savoir si les deux équations sont équivalentes ou non en multipliant la 1ère équation par a' et la 2ème équation par a (si $a \neq 0$ et $a' \neq 0$). Si les deux équations obtenues sont identiques, on peut en conclure que les deux équations initiales étaient équivalentes.

► *Exemple* :

$$\begin{cases} L_1 & 2x + 6y = 1 \\ L_2 & 3x + 9y = 2 \end{cases} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2 \times 9 - 3 \times 6 = 0.$$

On détermine si les deux équations sont équivalentes ou non :
$$\begin{cases} 3L_1 & 6x + 18y = 3 \\ 2L_2 & 6x + 18y = 4 \end{cases}$$

Les équations obtenues ne sont pas égales, donc les équations initiales n'étaient pas équivalentes. Le système n'admet aucune solution.

2 Résolution des systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues admettant un unique couple solution

On suppose donc ici que le déterminant du système est non nul.

Principe général :

Pour trouver x , on cherche à éliminer y . Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les termes en y s'éliminent.

Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.

Pour trouver y , on élimine de la même façon x avec une autre combinaison linéaire.

► *Exemple* :

$$\begin{cases} L_1 & 4x - y = 21 \\ L_2 & 3x + 2y = 13 \end{cases} \cdot \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4 \times 2 - 3 \times (-1) = 8 + 3 = 11 \neq 0.$$

• Pour trouver x , on élimine y à l'aide de la combinaison linéaire $2L_1 + L_2$.

(Remarque : pour déterminer la combinaison linéaire il faut bien observer les coefficients devant y)

Le calcul donne :

$$2L_1 : 8x - 2y = 42$$

$$L_2 : 3x + 2y = 13$$

$$2L_1 + L_2 : 11x = 55$$

On en déduit que $x = 5$.

- Pour trouver y , on élimine x à l'aide de la combinaison linéaire $3L_1 - 4L_2$.

Le calcul donne :

$$3L_1 : 12x - 3y = 63$$

$$\underline{-4L_2 : -12x - 8y = -42}$$

$$3L_1 - 4L_2 : -11y = 11$$

On en déduit que $y = -1$.

Remarque : il est inutile de détailler autant les calculs sur une copie. Il est préférable de rédiger de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 4L_2 \end{array} \begin{cases} 11x = 55 \\ -11y = 11 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ y = -1 \end{cases} . S = \{(5; -1)\}$$

3 Exemple de résolution d'un système nécessitant un changement d'inconnues

On considère le système $\begin{cases} 2x^2 + \frac{1}{y} = 17 \\ 3x^2 - \frac{1}{y} = 3 \end{cases}$.

Ce n'est pas un système linéaire (les équations ne sont pas de la forme $ax + by + c = 0$).

Mais en posant $X = x^2$ et $Y = \frac{1}{y}$, on obtient : $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \begin{cases} 2X + Y = 17 \\ 3X - Y = 3 \end{cases}$.

C'est un système linéaire que l'on peut résoudre avec la méthode usuelle :

$$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5 \neq 0. \text{ Le système admet un unique couple solution.}$$

$$\begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 2L_2 \end{array} \begin{cases} 5X = 20 \\ 5Y = 45 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} X = 4 \\ Y = 9 \end{cases}$$

On repasse alors aux inconnues de départ x et y :

$$\begin{cases} X = 4 \\ Y = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 = 4 \\ \frac{1}{y} = 9 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = \frac{1}{9} \end{cases}$$

On a deux valeurs possibles pour x et une seule pour y . D'où, $S = \left\{ \left(2; \frac{1}{9} \right); \left(-2; \frac{1}{9} \right) \right\}$

4 Exemple de résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

► Exemple :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \begin{cases} x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{cases}$$

- 1ère étape : On garde L_1 et on élimine x dans L_2 et L_3 en effectuant des combinaisons linéaires entre ces lignes et L_1 .

Pour éliminer x dans L_2 , on utilise la combinaison linéaire $L_1 + L_2$:

$$L_1 : x + 2y - z = 8$$

$$L_2 : -x + 3y + 4z = -7$$

$$\underline{2L_1 + L_2 : 5y + 3z = 1}$$

Le résultat devient la nouvelle L_2 .

Pour éliminer x dans L_3 , on utilise la combinaison linéaire $2L_1 - L_3$:

$$2L_1 : 2x + 4y - 2z = 16$$

$$\underline{-L_3 : -2x + y - 2z = 6}$$

$$2L_1 + L_2 : 5y - 4z = 22$$

Le résultat devient la nouvelle L_3 .

On obtient un nouveau système équivalent au premier :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ 5y + 3z = 1 \\ 5y - 4z = 22 \end{array} \right.$$

• 2ème étape : On garde L_1 et L_2 et on élimine y dans L_3 en effectuant une combinaison linéaire avec L_2 .

Pour éliminer y dans L_3 , on utilise la combinaison linéaire $L_2 - L_3$:

$$L_2 : 5y + 3z = 1$$

$$-L_3 : -5y + 4z = -22 \quad .$$

$$L_2 - L_3 : 7z = -21$$

Le résultat devient la nouvelle L_3 .

On obtient un nouveau système équivalent au premier et dont la forme triangulaire permet une résolution rapide :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ 5y + 3z = 1 \\ 7z = -21 \end{array} \right.$$

La dernière ligne nous donne $z = -3$.

En remplaçant z par -3 dans la 2ème ligne, on obtient $5y - 9 = 1$. On en déduit que $y = 2$.

En remplaçant z par -3 et y par 2 dans la 1ère ligne, on obtient $x + 4 + 3 = 8$. On en déduit que $x = 1$.

► **Remarque** : il est préférable de rédiger de la façon suivante

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ 2L_1 - L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ 5y + 3z = 1 \\ 5y - 4z = 22 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_2 - L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ 5y + 3z = 1 \\ 7z = -21 \end{array} \right.$$

$$S = \{(1, 2, -3)\}$$