Barycentres : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Soit ABC un triangle, D la barycentre de $(A,1)(B,2)(C,3)$, E le barycentre de $(A,2)(B,3)(C,1)$ et F le barycentre de $(A,3)(B,1)(C,2)$.
Montrer que le centre de gravité du triangle ABC est aussi le centre de gravité du triangle DEF.

Exercice 2 :

A et B sont deux points distincts.
On considére C le barycentre de $(A,2)(B,3)$ et D le barycentre de $(A,3)(B,2)$.
a) Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = 10$.
b) Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\left\|2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}\right\| = \left\|3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}\right\|$.

Exercice 3 :

Soit ABC un triangle .
a) Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
b) Déterminer la nature de l'ensemble des points M tels que
$\left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}\right\| = \left\|\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}\right\|$.

Exercice 4 :

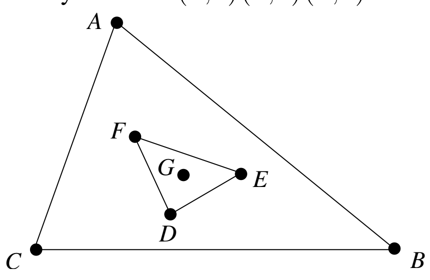
A, B, C et D sont quatres points distincts.
On note K le barycentre de $(A,3)(B,1)$, J le milieu de $[DC]$, G le centre de gravité de BCD et I le milieu de $[AG]$.
Montrer que les points I, J et K sont alignés.

Exercice 5 :

Soit $ABCD$ un parallélogramme de centre O, G le barycentre de $(A,2)(B,1)$ et H le barycentre de $(C,2)(D,1)$.
a) Montrer que les droites (AC), (BD) et (GH) sont concourantes.
b) Soit E le barycentre de $(G,3)(D,1)$. Montrer que E est le milieu de $[AO]$.

Réponses exercice 1 :

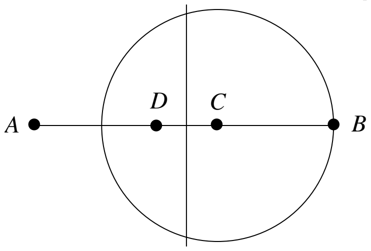
centre de gravité de DEF = barycentre de $(D,6)\,(E,6)\,(F,6)$
= barycentre de $(A,1)\,(B,2)\,(C,3)\,(A,2)\,(B,3)\,(C,1)\,(A,3)\,(B,1)\,(C,2)$
= barycentre de $(A,6)\,(B,6)\,(C,6)$= centre de gravité de ABC.



Réponses exercice 2 :

a) Pour tout point M, $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB} = 5\overrightarrow{MC}$.
On cherche l'ensemble des points M tels que $\left\|5\overrightarrow{MC}\right\| = 10 \Leftrightarrow MC = 2$.
Il s'agit donc du cercle de centre C et de rayon 2.

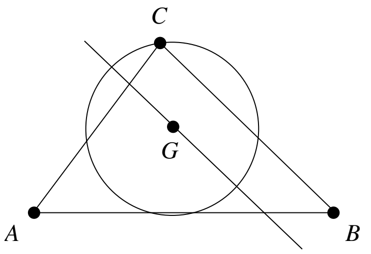
b) Pour tout point M, $2\overrightarrow{MA}+3\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MC}$ et $3\overrightarrow{MA}+2\overrightarrow{MB}=5\overrightarrow{MD}$.
On cherche l'ensemble des points M tels que $\left\|5\overrightarrow{MC}\right\|=\left\|5\overrightarrow{MD}\right\| \Leftrightarrow MC=MD$.
Il s'agit donc de la médiatrice de $[CD]$.



Réponses exercice 3 :

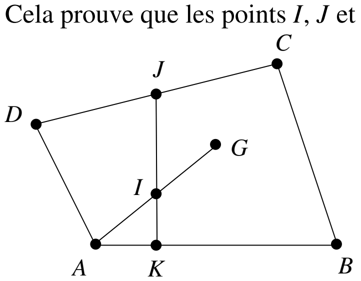
a) Soit G le barycentre de $(A,1)\,(B,1)\,(C,2)$.
Pour tout point M, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}+2\overrightarrow{MC}=4\overrightarrow{MG}$.
On cherche l'ensemble des points M tels que $4\overrightarrow{MG}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{BC}$.
Il s'agit donc de la droite parallèle à (BC) et passant par G.

b) Dans la somme $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}$, la somme des coefficients est nulle. Il s'agit donc en fait d'une somme constante (indépendante de M).
En effet, $\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB}-2\overrightarrow{MC}=\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{MA}-2\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}$.
On cherche l'ensemble des points M tels que $\left\|4\overrightarrow{MG}\right\|=\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right\| \Leftrightarrow MG=\dfrac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right\|$.
Il s'agit donc du cercle de centre G et de rayon $\dfrac{1}{4}\left\|\overrightarrow{AB}-2\overrightarrow{AC}\right\|$.



Réponses exercice 4 :

I milieu de $[AG] \Leftrightarrow I$ barycentre de $(A,3)(G,3)$
$\Leftrightarrow I$ barycentre de $(A,3)\,(D,1)\,(C,1)\,(B,1)$ (on remplace $(G,3)$ par $(D,1)\,(C,1)\,(B,1)$)
$\Leftrightarrow I$ barycentre de $(K,4)\,(J,2)$ (on remplace $(A,3)\,(D,1)$ par $(K,4)$ et $(C,1)\,(B,1)$ par $(J,2)$)
Cela prouve que les points I, J et K sont alignés.



Réponses exercice 5 :

a) On sait déja que les droites (AC) et (BD) se coupent en O.
Par ailleurs, le milieu de $[GH]$ = barycentre de $(G,3)\,(H,3)$
= barycentre de $(A,2)\,(B,1)\,(C,2)\,(D,1)$ (on remplace $(G,3)$ par $(A,2)\,(B,1)$ et $(H,3)$ par $(C,2)\,(D,1)$)
= barycentre de $(O,4)\,(O,2)$ (on remplace $(A,2)\,(C,2)$ par $(O,4)$ et $(B,1)\,(D,1)$ par $(O,2)$)
= O.
Donc O est aussi sur (GH). Les droites (AC), (BD) et (GH) sont concourantes en O.

b) E barycentre de $(G,3)\,(D,1) \Leftrightarrow E$ barycentre de $(A,2)\,(B,1)\,(D,1)$ (on remplace $(G,3)$ par $(A,2)\,(B,1)$)
$\Leftrightarrow E$ barycentre de $(A,2)\,(O,2)$ (on remplace $(B,1)\,(D,1)$ par $(O,2)$)
$\Leftrightarrow E$ milieu de $[AO]$.