

Limites : exercices

Les réponses non détaillées aux questions sont disponibles à la fin du document

Exercice 1 :

Déterminer la limite en $+\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $+\infty$)

a) $f(x) = x + \sqrt{x}$

b) $f(x) = \frac{1}{x} - \sqrt{x}$

c) $f(x) = \frac{1}{x^2} + 1$

d) $f(x) = \frac{1}{x+1} - 2$

e) $f(x) = \frac{\frac{1}{x} + 2}{\frac{1}{x^2} - 1}$

Exercice 2 :

Déterminer la limite en $-\infty$ de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $-\infty$)

a) $f(x) = \frac{1}{x^3} - x$

b) $f(x) = x^2 + \frac{1}{x^2}$

c) $f(x) = \frac{1}{x+3} - 2$

d) $f(x) = \frac{x+1}{\frac{1}{x} - 2}$

Exercice 3 :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction polynôme f dans les cas suivants :

a) $f(x) = 2x^2 - x + 1$

b) $f(x) = 3x^3 + 2x - 1$

c) $f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + 5x^2 - 7x + 1$

Exercice 4 :

Déterminer les limites en $-\infty$ et en $+\infty$ de la fonction rationnelle f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte horizontale en $-\infty$ ou en $+\infty$)

a) $f(x) = \frac{4x-1}{2x+3}$

b) $f(x) = \frac{x^2 + 2x - 1}{2x + 3}$

c) $f(x) = \frac{-4x + 1}{x^2 + 1}$

Exercice 5 :

Déterminer la limite en a (pour $x < a$ et pour $x > a$) de la fonction f dans les cas suivants :
(on précisera si la courbe de f admet une asymptôte verticale)

a) $f(x) = x + \frac{1}{x} \quad a = 0$

b) $f(x) = \frac{3x-2}{x+2} \quad a = -2$

c) $f(x) = \frac{x^2 + x - 3}{1 - x} \quad a = 1$

Exercice 6 :

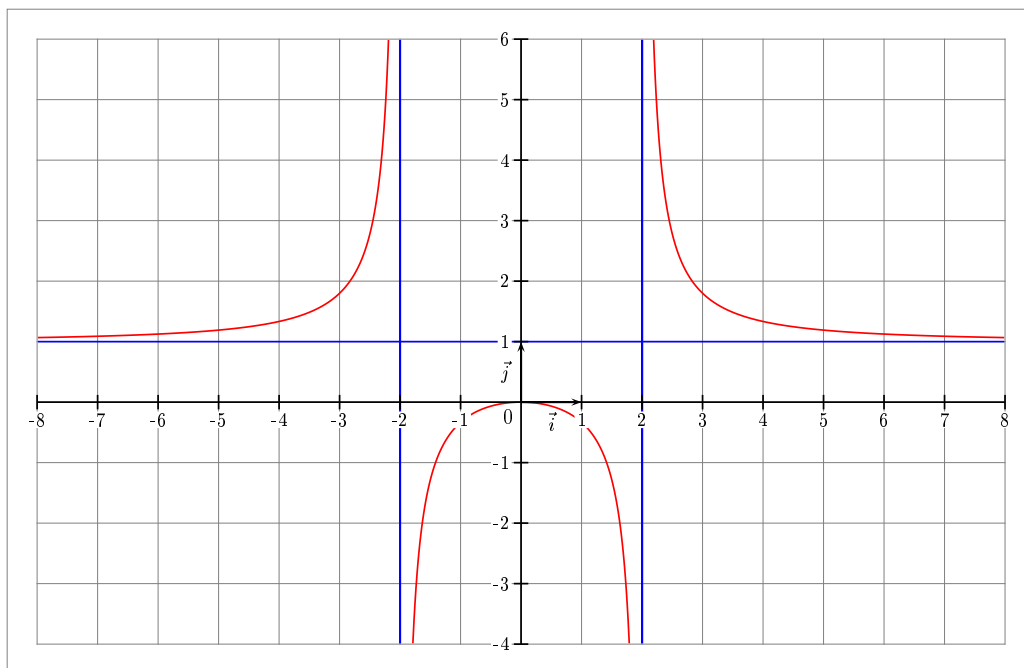
Soit f la fonction définie sur $] -1; +\infty[$ par $f(x) = \frac{-x^2 + 2}{x + 1}$.

- Etudier les limites de f en -1 ($x > -1$) et en $+\infty$.
- Montrer que la droite D d'équation $y = -x + 1$ est une asymptote oblique à la courbe de f en $+\infty$.

Exercice 7 :

f est une fonction définie sur $] -\infty; -2[\cup] -2; 2[\cup] 2; +\infty[$ dont la courbe est représentée sur le graphique ci-dessous en rouge. Les asymptotes à la courbe de f sont signalées en bleu.

Déterminer, d'après le graphique, les limites de la fonction f aux bornes et une équation de chacune des asymptotes.



Réponses exercice 1 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites :

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$ - pas d'asymptote horizontale
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$ - pas d'asymptote horizontale
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ - asymptote horizontale d'équation $y = 1$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ - asymptote horizontale d'équation $y = -2$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -2$ - asymptote horizontale d'équation $y = -2$

Réponses exercice 2 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites :

- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ - pas d'asymptote horizontale
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ - pas d'asymptote horizontale
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = -2$ - asymptote horizontale d'équation $y = -2$
- $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = +\infty$ - pas d'asymptote horizontale

Réponses exercice 3 :

On utilise la règle pour les limites des fonctions polynomes en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 2x^2 = +\infty ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^2 = +\infty \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^3 = +\infty ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} 3x^3 = -\infty \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} -\frac{1}{2}x^3 = -\infty ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} -\frac{1}{2}x^3 = +\infty \end{aligned}$$

Réponses exercice 4 :

On utilise la règle pour les limites des fonctions rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$.

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 2 = 2 ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{4x}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2 = 2 \\ \text{Asymptote horizontale d'équation } y &= 2 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty. \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{2} \times x = +\infty ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{x^2}{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{2} \times x = -\infty \\ \text{Pas d'asymptote horizontale.} \\ \text{c) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -4 \times \frac{1}{x} = 0 ; & \lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \times \frac{1}{x} = 0 \\ \text{Asymptote horizontale d'équation } y &= 0 \text{ en } +\infty \text{ et en } -\infty. \end{aligned}$$

Réponses exercice 5 :

Par application directe des règles sur les opérations avec les limites (on ne peut plus utiliser la règle sur les fonctions rationnelles car on n'est plus en $+\infty$ ou en $-\infty$) :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty ; & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \underbrace{x}_{\rightarrow 0} + \underbrace{\left(\frac{1}{x}\right)}_{\rightarrow -\infty} = -\infty \\ \text{Asymptote verticale d'équation } x &= 0. \\ \text{b) } \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} \underbrace{(3x-2)}_{\rightarrow -8} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x+2}\right)}_{\rightarrow +\infty} = -\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -2} x+2 = 0 \text{ par valeurs positives}) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} \underbrace{(3x-2)}_{\rightarrow -8} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x+2}\right)}_{\rightarrow -\infty} = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -2} x+2 = 0 \text{ par valeurs négatives}) \\ \text{Asymptote verticale d'équation } x &= -2. \\ \text{c) } \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x > 1}} \underbrace{(x^2+x-3)}_{\rightarrow -1} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\rightarrow -\infty} = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 1} 1-x = 0 \text{ par valeurs négatives}) \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow 1 \\ x < 1}} \underbrace{(x^2+x-3)}_{\rightarrow -1} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1-x}\right)}_{\rightarrow +\infty} = -\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow 1} 1-x = 0 \text{ par valeurs positives}) \\ \text{Asymptote verticale d'équation } x &= 1. \end{aligned}$$

Réponses exercice 6 :

$$\begin{aligned} \text{a) } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} f(x) &= \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \underbrace{(-x^2+2)}_{\rightarrow 3} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -1} x+1 = 0 \text{ par valeurs positives}) \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} -x = -\infty \quad (\text{utilisation de la règle pour les limites des fonctions rationnelles en } +\infty) \\ \text{b) } \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (-x+1) &= \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+2}{x+1} + x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{-x^2+2+x^2+x-x-1}{x+1} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x+1} = 0 \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} x+1 = +\infty). \\ \text{Cela prouve bien que } D &\text{ est asymptote oblique à la courbe } C_f \text{ en } +\infty. \end{aligned}$$

Réponses exercice 7 :

$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 1$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$; la droite d'équation $y = 1$ est asymptote horizontale à la courbe en $-\infty$ et en $+\infty$.

$\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x < -2}} f(x) = +\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow -2 \\ x > -2}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} f(x) = -\infty$; $\lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} f(x) = +\infty$.

Les droites d'équation $x = -2$ et $x = 2$ sont des asymptotes verticales à la courbe.