

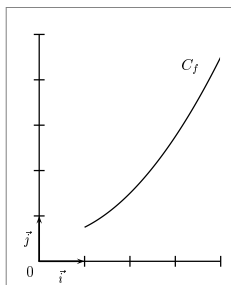
Limites : Résumé de cours et méthodes

1 Limite d'une fonction en $+\infty$ et en $-\infty$

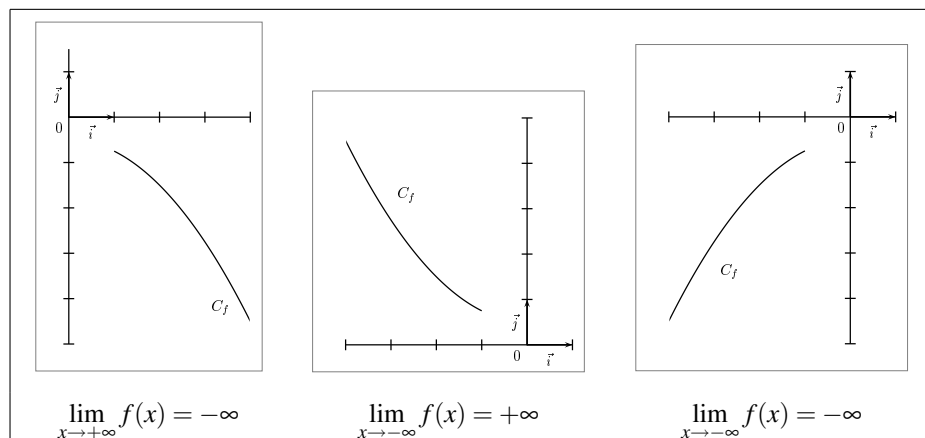
1-1 Limite infinie en $+\infty$ et en $-\infty$

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle admettant $+\infty$ comme borne supérieure. On dit que f a pour limite $+\infty$ en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez grand pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$.



► **Remarque :** on définit de la même façon,



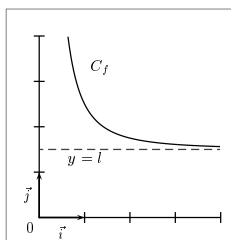
PROPRIÉTÉ

$$\begin{array}{llll} \lim_{x \rightarrow +\infty} x = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} x^3 = +\infty & \lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow -\infty} x = -\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 = +\infty & \lim_{x \rightarrow -\infty} x^3 = -\infty & \end{array}$$

1-2 Limite finie en $+\infty$ et en $-\infty$

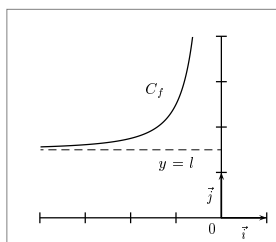
DÉFINITION

On dit qu'une fonction f a pour limite le réel l en $+\infty$ (ou que $f(x)$ tend vers l quand x tend vers $+\infty$) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez grand pour que $f(x)$ soit aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$.



On dit alors que la droite D d'équation $y = l$ est **asymptote horizontale** à la courbe C_f en $+\infty$.

► **Remarque :** on définit de la même façon $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$.



La droite D d'équation $y = l$ est dite asymptote horizontale à la courbe C_f en $-\infty$.

PROPRIÉTÉ

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x^3} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{\sqrt{x}} = 0$$

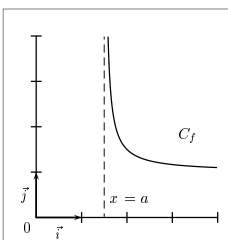
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^2} = 0 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{x^3} = 0$$

2 Limite d'une fonction en a (a réel)

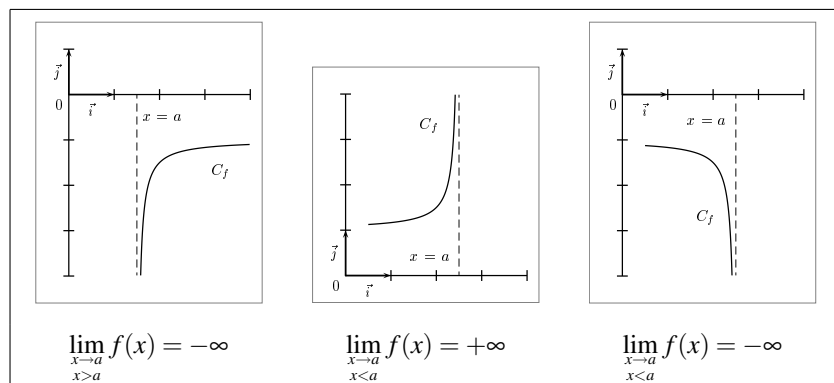
2-1 Limite infinie en a

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de la forme $]a, b[$. On dit que f a pour limite $+\infty$ en a (par valeurs supérieures) lorsqu'on peut toujours trouver un x assez proche de a ($x > a$) pour que $f(x)$ soit aussi grand que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{\substack{x \rightarrow a \\ x > a}} f(x) = +\infty$.



► **Remarque :** on définit de la même façon,



Dans ces quatre cas, on dit que la droite D d'équation $x = a$ est **asymptote verticale** à la courbe C_f .

PROPRIÉTÉ

$$\begin{array}{llll} \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x} = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{x^3} = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{1}{\sqrt{x}} = +\infty \\ \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x} = -\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^2} = +\infty & \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x < 0}} \frac{1}{x^3} = -\infty & \end{array}$$

2-2 Limite finie en a

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle contenant a ou de borne a . On dit que f a pour limite le réel l en a lorsqu'on peut toujours trouver un x assez proche de a pour que $f(x)$ soit aussi proche de l que l'on veut. On écrit alors que $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = l$.

PROPRIÉTÉ

Si f est définie en a et si f est la fonction racine carrée, ou une fonction polynôme, ou une fonction rationnelle alors $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = f(a)$.

► Exemple : $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{4x - 3}{x^2 + 1} = \frac{4 \times 0 - 3}{0^2 + 1} = -3$

3 Opérations sur les limites

On note **FI** (pour forme indéterminée) les cas où les théorèmes ne permettent pas de conclure.

3-1 Limite d'une somme

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors $f + g$ a pour limite
l	l'	$l + l'$
l	$+\infty$	$+\infty$
l	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$+\infty$	$-\infty$	FI

► Exemples :

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} = +\infty$

• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{\frac{1}{x^2}}_{\rightarrow 0} + \underbrace{x^3}_{\rightarrow -\infty} = -\infty$

• $\lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow \sqrt{0}=0} + \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$

3-2 Limite d'une produit

Si f a pour limite	et si g a pour limite	alors fg a pour limite
l	l'	ll'
$l \neq 0$	$+\infty$	(signe de l) ∞
$l \neq 0$	$-\infty$	(signe de $-l$) ∞
$+\infty$	$+\infty$	$+\infty$
$+\infty$	$-\infty$	$-\infty$
$-\infty$	$-\infty$	$+\infty$
0	$\pm\infty$	FI

► Exemples :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{x}_{\rightarrow +\infty} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} -2 \underbrace{x^2}_{\rightarrow +\infty} = -\infty$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \underbrace{\left(\frac{1}{x} - 2\right)}_{\rightarrow -2} \times \underbrace{\sqrt{x}}_{\rightarrow +\infty} = -\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0)$$

3-3 Limite de l'inverse

Si f a pour limite	alors $\frac{1}{f}$ a pour limite
$l \neq 0$	$\frac{1}{l}$
$\pm\infty$	0
0 (par valeurs +)	$+\infty$
0 (par valeurs -)	$-\infty$

► **Remarque :** Quand le dénominateur tend vers 0, il faut déterminer et justifier s'il le fait par valeurs positives ou négatives (on peut s'aider d'un tableau de signes).

► Exemples :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{3x+2} = 0, \quad \text{car } \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x+2 = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} \frac{1}{x-2} = +\infty, \quad \text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x > 2}} x-2 = 0^+ \quad (x-2 > 0, \text{ pour } x > 2)$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} \frac{1}{x-2} = -\infty, \quad \text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow 2 \\ x < 2}} x-2 = 0^- \quad (x-2 < 0, \text{ pour } x < 2)$$

3-4 Limite d'un quotient

Pour étudier la limite de $\frac{f}{g}$, on écrit que $\frac{f}{g} = f \times \frac{1}{g}$. On détermine alors la limite de f et de $\frac{1}{g}$, ce qui permet d'en déduire la limite de $\frac{f}{g}$.

► Exemples :

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \frac{x+1}{\sqrt{x}} = \lim_{\substack{x \rightarrow 0 \\ x > 0}} \underbrace{(x+1)}_{\rightarrow 1} \times \underbrace{\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty$$

$$\bullet \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \frac{x^2+3}{x+1} = \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} \underbrace{(x^2+3)}_{\rightarrow (-1)^2+3=4} \times \underbrace{\left(\frac{1}{x+1}\right)}_{\rightarrow +\infty} = +\infty \quad (\text{car } \lim_{\substack{x \rightarrow -1 \\ x > -1}} x+1 = 0^+)$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{2x^3}{1+\frac{1}{x}} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \underbrace{(2x^3)}_{\rightarrow -\infty} \times \underbrace{\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)}_{\rightarrow 1} = -\infty \quad (\text{car } \lim_{x \rightarrow -\infty} 1 + \frac{1}{x} = 1)$$

4 Cas des fonctions polynomes et rationnelles en $+\infty$ et en $-\infty$

On utilise la propriété suivante (uniquement valable en $+\infty$ et en $-\infty$) :

PROPRIÉTÉ

- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction polynome a la même limite que son terme de plus haut degré.
- En $+\infty$ et en $-\infty$, une fonction rationnelle (c'est à dire, un quotient de deux polynomes) a la même limite que le rapport des termes de plus haut degré du numérateur et du dénominateur.

► Exemples :

$$\bullet \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 - x + 4 = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x^2 = +\infty \quad (3x^2 \text{ est le terme de plus haut degré de ce polynome})$$

$$\bullet \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 + 4x^2 - 7x + 1 = \lim_{x \rightarrow -\infty} 2x^3 = -\infty \quad (2x^3 \text{ est le terme de plus haut degré de ce polynome})$$

• $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + 4x + 2}{x - 7} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} 3x = +\infty$ (on ne garde que le terme de plus haut degré au numérateur et au dénominateur - il faut ensuite obligatoirement simplifier le quotient obtenu)

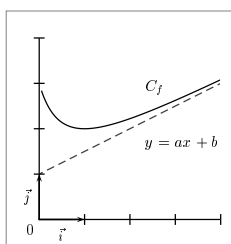
• $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1 - 4x^2}{x^3 + 7x + 6} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-4x^2}{x^3} = \lim_{x \rightarrow -\infty} -4 \times \underbrace{\frac{1}{x}}_{\rightarrow 0} = 0$

5 Asymptote oblique à une courbe

DÉFINITION

Soit f une fonction définie sur un intervalle de borne $+\infty$ et a, b deux réels ($a \neq 0$).

Si $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.



► Remarques :

• De la même façon, si $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax + b$ est dite asymptote oblique à la courbe C_f en $-\infty$.

• Une même droite peut-être asymptote oblique en $-\infty$, ou en $+\infty$, ou aux deux infinis. Il faut donc vérifier la limite de $f(x) - (ax + b)$ à tous les infinis possibles (selon ce qu'indique l'ensemble de définition de f).

► Exemple : Soit f définie sur $]0; +\infty[$ par $f(x) = \frac{3x^2 + x + 1}{x}$ et D la droite d'équation $y = 3x + 1$.

Montrons que D est une asymptote oblique à la courbe C_f :

Vu l'ensemble de définition, le seul « infini » où D puisse être asymptote est $+\infty$.

On a $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) - (3x + 1) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1}{x} - 3x - 1 = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{3x^2 + x + 1 - 3x^2 - x}{x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

Cela prouve bien que D est asymptote oblique à la courbe C_f en $+\infty$.

6 Bilan sur les asymptotes

• Asymptotes verticales :

– Elles n'existent que pour x tendant vers un nombre fini.

– Si $\lim_{x \rightarrow a \text{ ou } x < a} f(x) = \pm\infty$ alors la droite d'équation $x = a$ est asymptote verticale à la courbe C_f .

• Asymptotes horizontales :

– Elles n'existent que pour x tendant vers un « infini » (elles peuvent être asymptotes en un infini, ou aux deux infinis).

– Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = l$ (l réel) alors la droite D d'équation $y = l$ est asymptote horizontale à la courbe C_f .

– Pour étudier la position relative entre l'asymptote D et la courbe C_f , il suffit d'étudier le signe de $f(x) - l$:

Si pour tout x d'un intervalle I , $f(x) - l > 0$ alors C_f est au dessus de D sur I .

Si pour tout x d'un intervalle I , $f(x) - l < 0$ alors C_f est en dessous de D sur I .

• Asymptotes obliques :

– Elles n'existent que pour x tendant vers un « infini » (elles peuvent être asymptotes en un infini, ou aux deux infinis).

– Si $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) - (ax + b) = 0$ alors la droite D d'équation $y = ax + b$ est asymptote oblique à la courbe C_f .

– Pour étudier la position relative entre l'asymptote D et la courbe C_f , il suffit d'étudier le signe de $f(x) - (ax + b)$:

Si pour tout x d'un intervalle I , $f(x) - (ax + b) > 0$ alors C_f est au dessus de D sur I .

Si pour tout x d'un intervalle I , $f(x) - (ax + b) < 0$ alors C_f est en dessous de D sur I .

7 Théorèmes de comparaison en $+\infty$ ou en $-\infty$

PROPRIÉTÉ

Etant donné f, u et v trois fonctions définies sur un intervalle I de borne $+\infty$:

- Si pour tout x de I , $f(x) \geq u(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = +\infty$ alors on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = +\infty$. (« une fonction supérieure à une fonction tendant vers $+\infty$ tend aussi vers $+\infty$ »)
- Si pour tout x de I , $f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = -\infty$ alors on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = -\infty$. (« une fonction inférieure à une fonction tendant vers $-\infty$ tend aussi vers $-\infty$ »)
- Si pour tout x de I , $u(x) \leq f(x) \leq v(x)$ et si $\lim_{x \rightarrow +\infty} u(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} v(x) = l$ (l réel) alors on peut affirmer que $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$. (« une fonction encadrée par deux fonctions tendant vers l tend aussi vers l » - cette propriété est appelée « théorème des gendarmes »)

► Remarques :

- On a la même propriété quand x tend vers $-\infty$.
- On n'utilise ces théorèmes que pour les limites que ne l'on sait pas déterminer directement

► Exemples :

- Pour tout $x > 0$, $\sqrt{x+3} \geq \sqrt{x}$. Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x} = +\infty$. On peut en conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{x+3} = +\infty$

- Pour tout $x > 1$, $1 \leq 1 + \frac{1}{x} \leq 2 \Rightarrow \sqrt{1} \leq \sqrt{1 + \frac{1}{x}} \leq \sqrt{2} \Rightarrow \frac{1}{x} < \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} < \sqrt{2} \times \frac{1}{x}$.

Or, $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} = 0$ et $\lim_{x \rightarrow +\infty} \sqrt{2} \times \frac{1}{x} = 0$.

On peut donc en conclure que $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{1 + \frac{1}{x}}}{x} = 0$.