

## Suites : exercices

Les réponses aux questions sont disponibles à la fin du document

### Exercice 1 :

Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_n = n^2 - n + 1$ .

- Calculer  $U_0$  et  $U_{10}$ .
- Exprimer, en fonction de  $n$ ,  $U_n + 1$  et  $U_{n+1}$ .

### Exercice 2 :

Soit  $(U_n)$  la suite définie par  $U_n = \frac{1}{n+1}$ .

- Exprimer  $U_{n+1} - U_n$  en fonction de  $n$ .
- En déduire le sens de variation de la suite  $(U_n)$ .

### Exercice 3 :

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique de premier terme  $U_0 = 4$  et de raison  $a = \frac{1}{2}$ .

- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $U_{10}$  et  $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10}$ .

### Exercice 4 :

Soit  $(U_n)$  la suite arithmétique telle que  $U_4 = 5$  et  $U_{11} = 19$ .

Calculer la raison  $a$  et  $U_0$ .

### Exercice 5 :

Calculer les sommes suivantes :

- $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 121$
- $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 \dots - 34$ .

### Exercice 6 :

Soit  $(U_n)$  la suite géométrique de premier terme  $U_0 = 7$  et de raison  $b = 3$ .

- Exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer  $U_5$  et  $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_5$ .

### Exercice 7 :

Calculer la somme  $S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{512}$ .

### Exercice 8 :

On suppose que chaque année la production d'une usine subit une baisse de 4%.

Au cours de l'année 2000, la production a été de 25000 unités.

- On note  $P_0 = 25000$  et  $P_n$  la production prévue au cours de l'année  $(2000 + n)$ .  
Montrer que  $(P_n)$  est une suite géométrique dont on donnera la raison.
- Calculer la production de l'usine en 2005.

### Exercice 9 :

On place un capital  $U_0 = 1500$  euros à 4,5 % par an avec intérêts simples.

On note  $U_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

- Donner la nature de la suite  $(U_n)$  et exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .
- Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
- Au bout de combien d'années le capital initial aura-t'il doublé ?

### Exercice 10 :

On place un capital  $U_0 = 3500$  euros à 3 % par an avec intérêts composés.

On note  $U_n$  le capital obtenu au bout de  $n$  années.

- a) Donner la nature de la suite  $(U_n)$  et exprimer  $U_n$  en fonction de  $n$ .  
b) Calculer la valeur du capital au bout de 10 ans.
- 

### Réponses exercice 1 :

- a)  $U_0 = 0^2 - 0 + 1 = 1$  et  $U_{10} = 10^2 - 10 + 1 = 91$ .  
b)  $U_n + 1 = (n^2 - n + 1) + 1 = n^2 - n + 2$   
 $U_{n+1} = (n+1)^2 - (n+1) + 1 = n^2 + 2n + 1 - n - 1 + 1 = n^2 + n + 1$ .

### Réponses exercice 2 :

- a)  $U_{n+1} = \frac{1}{(n+1)+1} = \frac{1}{n+2}$   
Donc,  $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{n+1} = \frac{(n+1) - (n+2)}{(n+1)(n+2)} = \frac{-1}{(n+1)(n+2)}$ .  
b) Pour tout  $n$ ,  $U_{n+1} - U_n < 0$ . Donc la suite est décroissante.

### Réponses exercice 3 :

- a)  $U_n = U_0 + n \times a = 4 + \frac{1}{2}n$ .  
b)  $U_{10} = 4 + \frac{1}{2} \times 10 = 9$ .  
 $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{4+9}{2} = \frac{143}{2}$ .

### Réponses exercice 4 :

- $U_{11} = U_4 + (11-4) \times a \Leftrightarrow 19 = 5 + 7a \Leftrightarrow a = 2$ .  
 $U_4 = U_0 + 4 \times a \Leftrightarrow 5 = U_0 + 8 \Leftrightarrow U_0 = -3$ .

### Réponses exercice 5 :

- a)  $S_1 = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 121$  (somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2).  
nombre de termes =  $\frac{121-5}{2} + 1 = 59$ .  
 $S_1 = 59 \times \frac{5+121}{2} = 3717$   
b)  $S_2 = 5 + 2 - 1 - 4 - 7 \dots - 34$  (somme des termes d'une suite arithmétique de raison -3).  
nombre de termes =  $\frac{-34-5}{-3} + 1 = 14$ .  
 $S_2 = 14 \times \frac{5-34}{2} = -203$

### Réponses exercice 6 :

- a)  $U_n = b^n \times U_0 = 7 \times 3^n$ .  
b)  $U_5 = 7 \times 3^5 = 1701$ .  
 $U_0 + U_1 + U_2 + \dots + U_5 = 7 \times \frac{1-3^6}{1-3} = 2548$ .

### Réponses exercice 7 :

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison  $b = -\frac{1}{2}$ .

$$S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} \dots + \frac{1}{512}$$

$$-\frac{1}{2}S = -\frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} \cdots - \frac{1}{1024}.$$

En effectuant la différence des deux lignes, on obtient :

$$\frac{3}{2}S = \frac{1}{2} + \frac{1}{1024} = \frac{513}{1024}. \text{ D'où } S = \frac{513}{1024} \times \frac{2}{3} = \frac{171}{512}.$$

### Réponses exercice 8 :

a) Baisser une grandeur de 4% revient à la multiplier par  $(1 - \frac{4}{100}) = 0,96$ .

Pour tout  $n$ ,  $P_{n+1} = 0,96 \times P_n$ . Cela prouve que  $(P_n)$  est une suite géométrique de raison 0,96.

b)  $P_5 = b^5 \times P_0 = (0,96)^5 \times 25000 \approx 20384$ .

### Réponses exercice 9 :

a)  $(U_n)$  est arithmétique de raison :  $a = \frac{4,5}{100} \times 1500 = 67,5$ .

$$U_n = U_0 + n \times a = 1500 + 67,5 \times n.$$

b)  $U_{10} = 1500 + 67,5 \times 10 = 2175$ .

c)  $U_n \geq 3000 \Leftrightarrow 1500 + 67,5 \times n \geq 3000 \Leftrightarrow 67,5 \times n \geq 1500 \Leftrightarrow n \geq 22,2$ .

Il faudra donc attendre 23 années.

### Réponses exercice 10 :

a)  $(U_n)$  est géométrique de raison :  $b = 1 + \frac{3}{100} = 1,03$ .

$$U_n = b^n \times U_0 = 3500 \times (1,03)^n.$$

b)  $U_{10} = 3500 \times (1,03)^{10} \approx 4703,7$ .