

1 Généralités

DÉFINITION

Une suite numérique est une liste de nombres, rangés et numérotés :

- à l'entier 0 correspond le nombre noté U_0
 - à l'entier 1 correspond le nombre noté U_1
 - ...
 - à l'entier n correspond le nombre noté U_n (appelé terme de la suite de rang n).
- La suite est notée (U_n)

Remarque :

Ne pas confondre (U_n) qui représente la **suite**, et U_n qui est le **nombre** représentant le terme de la suite de rang n .

Il y a principalement deux manières de définir une suite :

1-1 Suite définie de façon explicite

Dans ce cas, on dispose d'une formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n .

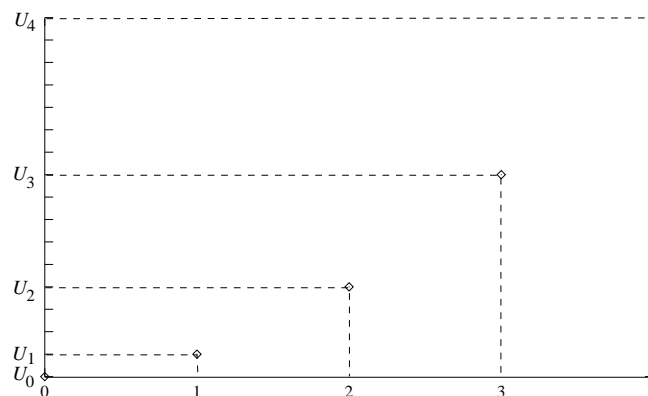
C'est à dire qu'il existe une fonction f définie sur $[0; +\infty[$ telle que, pour tout entier n , $U_n = f(n)$.

Exemples :

- 1) Soit (U_n) , la suite définie par $U_n = 3n + 4$.
Le premier terme de la suite est alors $U_0 = 3 \times 0 + 4 = 4$ (on remplace n par 0).
 $U_1 = 3 \times 1 + 4 = 7$ (on remplace n par 1).
 $U_{10} = 3 \times 10 + 4 = 34$ (on remplace n par 10).
Pour tout n , $U_{n+1} = 3 \times (n+1) + 4 = 3n + 3 + 4 = 3n + 7$ (on remplace n par $n+1$).
- 2) Soit (U_n) , la suite définie par $U_n = n^2$.
On a : $U_0 = 0^2 = 0$, $U_1 = 1^2 = 1$, $U_2 = 2^2 = 4$.
Et pour tout n , $U_{n+1} = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$.

Représentation graphique d'une suite définie de façon explicite : Dans un repère orthogonal, on place les points d'abscisse n et d'ordonnée U_n (que l'on ne joint pas entre eux !). Cela revient à ne tracer que les points d'abscisses entières de la courbe représentative de la fonction f .

Avec la suite de l'exemple 2 ($U_n = n^2$), cela donne la représentation graphique suivante :



1-2 Suite définie par une relation de récurrence

Dans ce cas là, il n'y a plus de formule permettant de calculer directement U_n en fonction de n , mais on dispose d'une relation (dite de récurrence) permettant de calculer le terme de rang $n+1$ à partir de celui de rang n . Ainsi, en connaissant le premier terme U_0 , on peut calculer le terme suivant U_1 . Puis avec U_1 , on peut calculer le terme suivant U_2 , etc...

D'un point de vue mathématique, la suite est définie par :

le terme initial U_0 et la relation de récurrence : $U_{n+1} = f(U_n)$ (où f est une fonction définie sur un intervalle I tel que : $U_0 \in I$ et pour tout x de I , $f(x) \in I$).

Exemples :

- 1) Soit (U_n) , la suite définie par $U_0 = 2$ et $U_{n+1} = 3 \times U_n$.
On a alors, $U_1 = 3 \times U_0 = 3 \times 2 = 6$ (on remplace n par 0 dans la relation de récurrence).
 $U_2 = 3 \times U_1 = 3 \times 6 = 18$ (on remplace n par 1 dans la relation de récurrence).
 $U_3 = 3 \times U_2 = 3 \times 18 = 54$ (on remplace n par 2 dans la relation de récurrence).
- 2) Soit (U_n) , la suite définie par $U_0 = -1,5$ et $U_{n+1} = 2\sqrt{4+U_n}$.
On a alors, $U_1 = 2\sqrt{4+U_0} = 2\sqrt{4-1,5} \approx 3,16$.
 $U_2 = 2\sqrt{4+U_1} \approx 2\sqrt{4+3,16} \approx 5,35$.

2 Sens de variation d'une suite

DÉFINITION

- Une suite (U_n) est dite **croissante** si pour tout entier n , $U_{n+1} \geq U_n$.
- Une suite (U_n) est dite **décroissante** si pour tout entier n , $U_{n+1} \leq U_n$.

Méthode pour étudier le sens de variation d'une suite :

Calculer et étudier le signe de $U_{n+1} - U_n$ pour tout n :

- 1) si pour tout n , $U_{n+1} - U_n \geq 0$ alors la suite (U_n) est croissante.
- 2) si pour tout n , $U_{n+1} - U_n \leq 0$ alors la suite (U_n) est décroissante.

Exemple : Soit (U_n) , la suite définie par $U_n = n^2$.

Pour tout n , $U_{n+1} - U_n = (n+1)^2 - n^2 = n^2 + 2n + 1 - n^2 = 2n + 1 \geq 0$ (car $n \geq 0$).

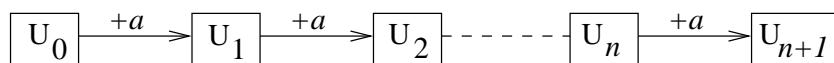
La suite (U_n) est donc croissante.

3 Suites arithmétiques

DÉFINITION

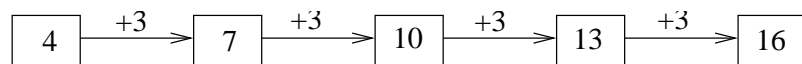
Une suite est dite arithmétique si l'on passe d'un terme au terme suivant en ajoutant toujours le même nombre.

Autrement dit, une suite (U_n) est **arithmétique** s'il existe un réel a (appelé **raison**) tel que pour tout entier n , $U_{n+1} = U_n + a$.



Exemple :

4, 7, 10, 13 et 16 sont les premiers termes d'une suite arithmétique de raison 3 :



PROPRIÉTÉ

Si une suite (U_n) est telle que pour tout n , $U_{n+1} - U_n = \text{constante}$ alors (U_n) est une suite arithmétique de raison égale à la constante.

Exemple :

Soit (U_n) , la suite définie par $U_n = 4n + 5$.

Pour tout n , $U_{n+1} = 4(n+1) + 5 = 4n + 9$. Donc, $U_{n+1} - U_n = 4n + 9 - (4n + 5) = 4$.

(U_n) est donc une suite arithmétique de raison égale à 4.

Remarques :

- De façon générale, si pour tout n , U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = An + B$ alors (U_n) est une suite arithmétique de raison A .
- Les points de la représentation graphique d'une suite arithmétique se situent sur une même droite de coefficient directeur égal à la raison.

PROPRIÉTÉ

Si (U_n) est une suite arithmétique de raison a alors pour tous entiers n et p :

- $U_n = U_0 + na$
- $U_n = U_p + (n - p)a$
- $U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n = (n - p + 1) \times \frac{U_p + U_n}{2} = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2}$
(si $p < n$)

Exemples :

- 1) Soit (U_n) la suite arithmétique de 1er terme $U_0 = 2$ et de raison $a = 3$.
 $U_{10} = U_0 + 10a = 2 + 10 \times 3 = 32$; $U_{33} = U_0 + 33a = 2 + 33 \times 3 = 101$
 Pour tout n , $U_n = U_0 + na = 2 + 3n$.
 $U_0 + U_1 + \dots + U_{10} = 11 \times \frac{2+32}{2} = 187$.
 (attention : le nb de termes est égal à 11 pas à 10!)
 Pour tout n , $S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = (n + 1) \times \frac{U_0 + U_n}{2} = (n + 1) \times \frac{2 + (2 + 3n)}{2} = \frac{(n + 1)(4 + 3n)}{2}$.
- 2) Soit (U_n) la suite arithmétique telle que $U_2 = 7$ et $U_5 = 19$.
 Pour trouver la raison a : on a $U_5 = U_2 + (5 - 2)a$, d'où $19 = 7 + 3a \Leftrightarrow a = 4$
 A partir de là, on peut calculer U_{10} en utilisant que $U_{10} = U_2 + (10 - 2)a = 7 + 8 \times 4 = 39$.
 On a aussi : $U_2 + U_3 + \dots + U_{10} = 9 \times \frac{7+39}{2} = 207$.
- 3) Calcul de la somme $S = 5 + 7 + 9 + 11 + \dots + 119 + 121$:
 On reconnaît la somme des termes d'une suite arithmétique de raison 2 (on passe d'un terme au terme suivant de la somme en ajoutant à chaque fois 2). Mais il nous manque le nombre de termes pour pouvoir appliquer la formule.
 On utilise alors la propriété suivante : $\text{nb de termes} = \frac{\text{dernier terme} - \text{premier}}{\text{raison}} + 1$.
 Ce qui nous donne ici un nombre de termes égal à $59 \left(\frac{121 - 5}{2} + 1 \right)$.
 D'où, $S = (\text{nb de termes}) \times \frac{\text{1er terme} + \text{dernier}}{2} = 59 \times \frac{5 + 121}{2} = 3717$

Exemple classique : placements à intérêts simples

- Principe général : pour un taux annuel de $x\%$, on reçoit chaque année le même intérêt égal à $x\%$ du capital initial. Le capital obtenu au bout de la n ème année, U_n , est le terme d'une suite arithmétique de raison égale à $\frac{x}{100} \times U_0$.
- Application : pour un taux annuel de 5 % avec intérêts simples et un capital initial de $U_0 = 1000$ euros. La raison de la suite arithmétique est : $a = \frac{5}{100} \times 1000 = 50$. Le capital au bout de 8 ans sera : $U_8 = U_0 + 8a = 1000 + 8 \times 50 = 1400$.

PROPRIÉTÉ

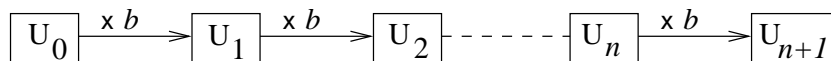
Sens de variation d'une suite arithmétique de raison a :

- Si $a \geq 0$, la suite est croissante.
- Si $a \leq 0$, la suite est décroissante.

4 Suites géométriques

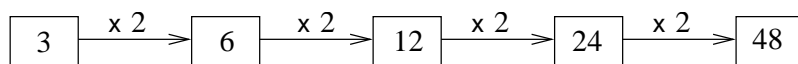
DÉFINITION

Une suite est dite géométrique si on passe d'un terme au terme suivant en le multipliant toujours par le même nombre non nul. Autrement dit, une suite (U_n) est **géométrique** s'il existe un réel $b \neq 0$ (appelé **raison**) tel que pour tout entier n , $U_{n+1} = b \times U_n$.



Exemple :

3, 6, 12, 24 et 48 sont les premiers termes d'une suite géométrique de raison 2 :



PROPRIÉTÉ

Si une suite (U_n) (n'ayant aucun terme nul) est telle que pour tout n , $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \text{constante}$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison égale à la constante.

Exemple :

Soit (U_n) , la suite définie par $U_n = 3 \times 4^n$.

Pour tout n , $\frac{U_{n+1}}{U_n} = \frac{3 \times 4^{n+1}}{3 \times 4^n} = 4$.

(U_n) est donc une suite géométrique de raison égale à 4.

Remarque :

De façon générale, si pour tout n , U_n peut s'écrire sous la forme $U_n = A \times B^n$ alors (U_n) est une suite géométrique de raison B .

PROPRIÉTÉ

Si (U_n) est une suite géométrique de raison b alors pour tous entiers n et p :

- $U_n = b^n \times U_0$
- $U_n = b^{(n-p)} \times U_p$
- $U_p + U_{p+1} + \dots + U_{n-1} + U_n = U_p \times \frac{1 - b^{(n-p+1)}}{1 - b} = \text{1er terme} \times \frac{1 - b^{(\text{nb de termes})}}{1 - b}$
(si $p < n$ et si $b \neq 1$)

Exemples :

1) Soit (U_n) la suite géométrique de 1er terme $U_0 = 5$ et de raison $b = 2$.

$$U_4 = b^4 \times U_0 = 2^4 \times 5 = 80 ; \quad U_{10} = b^{10} \times U_0 = 2^{10} \times 5 = 5120$$

Pour tout n , $U_n = b^n \times U_0 = 5 \times 2^n$.

$$U_0 + U_1 + \dots + U_8 = 5 \times \frac{1 - 2^9}{1 - 2} = 2555. \text{ (attention : le nb de termes est égal à 9 pas à 8 !)}$$

$$\text{Pour tout } n, S_n = U_0 + U_1 + \dots + U_n = U_0 \times \frac{1 - b^{(n+1)}}{1 - b} = 5 \times \frac{1 - 2^{(n+1)}}{1 - 2} = 5 \times (2^{(n+1)} - 1).$$

2) Soit (U_n) la suite géométrique de raison positive telle que $U_2 = 7$ et $U_4 = 63$.

Pour trouver la raison b : on a $U_4 = b^{4-2} \times U_2$, d'où $63 = 7 \times b^2 \Leftrightarrow b^2 = 9$.

Donc, $b = 3$ (car $b > 0$)

A partir de là, on peut calculer U_6 en utilisant que $U_6 = b^{6-2} \times U_2 = 3^4 \times 7 = 567$.

$$\text{On a aussi : } U_2 + U_3 + \dots + U_6 = 7 \times \frac{1 - 3^5}{1 - 3} = 847.$$

3) Calcul de la somme $S = 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 128 + 256$:

On reconnaît la somme des termes d'une suite géométrique de raison 2 (on passe d'un terme au terme suivant de la somme en le multipliant à chaque fois par 2).

Généralement, on utilise la méthode qui consiste à écrire sur une ligne la somme en question et en dessous le produit de cette somme avec la raison de la suite géométrique. En faisant la différence de ces deux lignes, on obtient rapidement le résultat grâce aux éliminations qui en découlent :

$$\begin{array}{r} S = 4 + 8 + 16 + 32 + \dots + 128 + 256 \\ - 2S = 8 + 16 + 32 + 64 + \dots + 256 + 512 \\ \hline -S = 4 - 512 \end{array}$$

Finalement, on a $S = 508$.

Exemple classique : placements à intérêts composés

- Principe général : pour un taux annuel de $x\%$, le capital augmente chaque année de $x\%$ (ce qui revient à le multiplier par $1 + \frac{x}{100}$). Donc le capital obtenu au bout de la n ème année, U_n , est en fait le terme d'une suite géométrique de raison égale à $1 + \frac{x}{100}$.
- Application : pour un taux annuel de 5% avec intérêts composés et un capital initial de $U_0 = 1000$ euros.
La raison de la suite géométrique est $b = 1 + \frac{5}{100} = 1,05$.
Le capital au bout de 8 ans sera : $U_8 = b^8 \times U_0 = (1,05)^8 \times 1000 \approx 1477,45$.