

# Systèmes linéaires : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

## Exercice 1 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} 2x - 5y = -8 \\ x + 7y = 15 \end{cases} & 2) \begin{cases} 10x + 4y = 3 \\ -5x + 20y = 4 \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x + 3y = 5 \\ \frac{2}{3}x + y = -1 \end{cases} \\ 4) \begin{cases} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{cases} & 5) \begin{cases} 4x + y = 5 \\ 6x - 2y = -3 \end{cases} & \end{array}$$

## Exercice 2 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^2$  les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} \frac{1}{x} + \frac{2}{y} = 5 \\ \frac{3}{x} - \frac{1}{y} = 1 \end{cases} & 2) \begin{cases} \frac{2}{x+1} + \frac{3}{y-1} = 5 \\ \frac{1}{x+1} + \frac{1}{y-1} = 1 \end{cases} & 3) \begin{cases} x^2 - y^2 = 96 \\ x^2 - 5y^2 = -4 \end{cases} \end{array}$$

## Exercice 3 :

Résoudre dans  $\mathbb{R}^3$  les systèmes suivants :

$$\begin{array}{lll} 1) \begin{cases} x - 4y + z = -2 \\ 3y - z = 3 \\ 3z = 9 \end{cases} & 2) \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ 2x - y + 2z = 2 \\ -x + y + z = -3 \end{cases} & 3) \begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \end{cases} \end{array}$$

## Exercice 4 :

Calculer les côtés d'un rectangle, sachant que si l'on augmente la largeur de 3 mètres et si l'on diminue d'autant la longueur, l'aire ne change pas ; mais si augmentant la largeur de 5 mètres, on diminue la longueur de 3 mètres, l'aire augmente de  $16 \text{ m}^2$ .

## Réponses exercice 1 :

$$\begin{array}{l} 1) \Delta = 19. \begin{cases} 7L_1 + 5L_2 \\ L_1 - 2L_2 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . S = \{(1; 2)\} . \\ 2) \Delta = 220. \begin{cases} 5L_1 - L_2 \\ L_1 + 2L_2 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . S = \{(\frac{1}{5}; \frac{1}{4})\} . \\ 3) \Delta = 0. \begin{cases} \frac{2}{3}L_1 \\ 2L_2 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . S = \emptyset \text{ (les deux équations ne sont pas équivalentes)}. \\ 4) \Delta = 11. \begin{cases} 2L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 4L_2 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . S = \{(5; -1)\} . \\ 5) \Delta = -14. \begin{cases} 2L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 2L_2 \end{cases} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . S = \{(\frac{1}{2}; 3)\} . \end{array}$$

## Réponses exercice 2 :

Ce sont des systèmes nécessitant un changement d'inconnues.

1) On pose  $X = \frac{1}{x}$  et  $Y = \frac{1}{y}$ .

$$\begin{cases} X + 2Y = 5 \\ 3X - Y = 1 \end{cases} \quad \Delta = -7. \quad \begin{matrix} L_1 + 2L_2 \\ 3L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . X = 1 \text{ et } Y = 2.$$

D'où  $x = 1$  et  $y = \frac{1}{2}$ .  $S = \left\{ \left( 1; \frac{1}{2} \right) \right\}$ .

2) On pose  $X = \frac{1}{x+1}$  et  $Y = \frac{1}{y-1}$ .

$$\begin{cases} 2X + 3Y = 5 \\ X + Y = 1 \end{cases} \quad \Delta = -1. \quad \begin{matrix} L_1 - 3L_2 \\ L_1 - 2L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . X = -2 \text{ et } Y = 3.$$

D'où  $x = -\frac{3}{2}$  et  $y = \frac{4}{3}$ .  $S = \left\{ \left( -\frac{3}{2}; \frac{4}{3} \right) \right\}$ .

2) On pose  $X = x^2$  et  $Y = y^2$ .

$$\begin{cases} X - Y = 96 \\ X - 5Y = -4 \end{cases} \quad \Delta = -4. \quad \begin{matrix} 5L_1 - L_2 \\ L_1 - L_2 \end{matrix} \begin{cases} \cdots \\ \cdots \end{cases} . X = 121 \text{ et } Y = 25.$$

D'où  $x = 11$  ou  $x = -11$  ;  $y = 5$  ou  $y = -5$ .  $S = \{(11; 5) ; (11; -5) ; (-11; 5) ; (-11; -5)\}$ .

## Réponses exercice 3 :

1) Le système est déjà triangulaire :

$$L_3 \longrightarrow z = 3.$$

$$L_2 \longrightarrow y = 2.$$

$$L_1 \longrightarrow x = 3.$$

$$S = \{(3, 2, 3)\}$$

2)

$$\begin{matrix} L_1 \\ 2L_1 - L_2 \\ L_1 + L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ 11L_2 - 21L_3 \end{matrix} \begin{cases} x + 10y - 3z = 5 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire.  $S = \{(2, 0, -1)\}$

3)

$$\begin{matrix} L_1 \\ L_1 - 2L_2 \\ L_1 + 2L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases} \Leftrightarrow \begin{matrix} L_1 \\ L_2 \\ L_2 + L_3 \end{matrix} \begin{cases} 2x - y + 2z = -6 \\ \cdots \\ \cdots \end{cases}$$

Le système est alors triangulaire.  $S = \{(1, 2, -3)\}$

## Réponses exercice 4 :

Soient  $x$  la largeur et  $y$  la longueur du rectangle.

$$\text{On a : } \begin{cases} (x+3)(y-3) = xy \\ (x+5)(y-3) = xy + 16 \end{cases}$$

$$\text{En développant et en simplifiant les équations, on obtient : } \begin{cases} -3x + 3y - 9 = 0 \\ -3x + 5y - 31 = 0 \end{cases} .$$

La résolution du système donne  $x = 8$  et  $y = 11$ .