Systèmes linéaires : Résumé de cours et méthodes

1 Systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues - Déterminant et nombre de solutions

On considère le système : $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} ax+by=c \\ a'x+b'y=c' \end{array} \right.$

(x et y sont les inconnues, L_1 et L_2 désignent les deux équations formant le système)

Résoudre ce système, c'est déterminer l'ensemble S des couples (x,y) vérifiant les deux équations simultanément.

On appelle **déterminant** du système le réel Δ défini par $\Delta = \begin{vmatrix} a & b \\ a' & b' \end{vmatrix} = ab' - a'b$.

• Si $\Delta \neq 0$, le système admet un unique couple solution.
(voir le paragraphe suivant pour la recherche de ce couple solution)

• Si $\Delta = 0$, le système admet une infinité de solutions si les deux équations sont équivalentes et aucune solution dans le cas contraire.

► **Remarque :** Quand $\Delta = 0$, on peut savoir si les deux équations sont équivalentes ou non en multipliant la 1ère équation par a' et la 2ème équation par a (si $a \neq 0$ et $a' \neq 0$). Si les deux équations obtenues sont identiques, on peut en conclure que les deux équations initiales étaient équivalentes.

► *Exemple :*

$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 2x+6y=1 \\ 3x+9y=2 \end{array} \right. . \Delta = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 9 \end{vmatrix} = 2\times 9 - 3\times 6 = 0.$

On détermine si les deux équations sont équivalentes ou non : $\begin{array}{l} 3L_1 \\ 2L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 6x+18y=3 \\ 6x+18y=4 \end{array} \right. .$

Les équations obtenues ne sont pas égales, donc les équations initiales n'étaient pas équivalentes. Le système n'admet aucune solution.

2 Résolution des systèmes linéaires de 2 équations à 2 inconnues admettant un unique couple solution

On suppose donc ici que le déterminant du système est non nul.

Principe général :
Pour trouver x, on cherche à éliminer y. Cela se fait en multipliant les deux équations par des coefficients judicieusement choisis de telle façon qu'en ajoutant ces deux nouvelles équations les terme en y s'éliminent.
Ce style d'opération s'appelle une **combinaison linéaire**.
Pour trouver y, on élimine de la même façon x avec une autre combinaison linéaire.

► *Exemple :*

$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array} \left\{ \begin{array}{l} 4x-y=21 \\ 3x+2y=13 \end{array} \right. . \Delta = \begin{vmatrix} 4 & -1 \\ 3 & 2 \end{vmatrix} = 4\times 2 - 3\times(-1) = 8+3 = 11 \neq 0.$

• Pour trouver x, on élimine y à l'aide de la combinaison linéaire $2L_1 + L_2$.
(Remarque : pour déterminer la combinaison linéaire il faut bien observer les coefficients devant y)
Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 2L_1 \ : \ 8x-2y=42 \\ \underline{L_2 \ : \ 3x+2y=13} \\ 2L_1+L_2 \ : \ 11x=55 \end{array} .$$

On en déduit que $x=5$.

• Pour trouver y, on élimine x à l'aide de la combinaison linéaire $3L_1 - 4L_2$.
Le calcul donne :

$$\begin{array}{l} 3L_1 \,:\, 12x - 3y = 63 \\ \underline{-4L_2 \,:\, -12x - 8y = -42} \\ 3L_1 - 4L_2 \,:\, -11y = 11 \end{array}.$$

On en déduit que $y = -1$.

Remarque : il est inutile de détailler autant les calculs sur une copie. Il est préférable de rédiger de la façon suivante :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 4x - y = 21 \\ 3x + 2y = 13 \end{array}\right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} 2L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 4L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 11x = 55 \\ -11y = 11 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 5 \\ y = -1 \end{array}\right. .S = \{(5;-1)\}$$

3 Exemple de résolution d'un système nécessitant un changement d'inconnues

On considère le système $\left\{\begin{array}{l} 2x^2 + \frac{1}{y} = 17 \\ 3x^2 - \frac{1}{y} = 3 \end{array}\right.$.

Ce n'est pas un système linéaire (les équations ne sont pas de la forme $ax + by + c = 0$).

Mais en posant $X = x^2$ et $Y = \frac{1}{y}$, on obtient : $\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 2X + Y = 17 \\ 3X - Y = 3 \end{array}\right.$.

C'est un système linéaire que l'on peut résoudre avec la méthode usuelle :

$\Delta = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = 2 \times (-1) - 3 \times 1 = -5 \neq 0$. Le système admet un unique couple solution.

$$\begin{array}{l} L_1 + L_2 \\ 3L_1 - 2L_2 \end{array}\left\{\begin{array}{l} 5X = 20 \\ 5Y = 45 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} X = 4 \\ Y = 9 \end{array}\right.$$

On repasse alors aux inconnues de départ x et y :

$$\left\{\begin{array}{l} X = 4 \\ Y = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x^2 = 4 \\ \frac{1}{y} = 9 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} x = 2 \text{ ou } x = -2 \\ y = \frac{1}{9} \end{array}\right. .$$

On a deux valeurs possibles pour x et une seule pour y. D'où, $S = \left\{\left(2;\frac{1}{9}\right) ; \left(-2;\frac{1}{9}\right)\right\}$

4 Exemple de résolution d'un système linéaire de 3 équations à 3 inconnues

▶ *Exemple :*

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array}\left\{\begin{array}{l} x + 2y - z = 8 \\ -x + 3y + 4z = -7 \\ 2x - y + 2z = -6 \end{array}\right.$$

• 1ère étape : On garde L_1 et on élimine x dans L_2 et L_3 en effectuant des combinaisons linéaires entre ces lignes et L_1.
Pour éliminer x dans L_2, on utilise la combinaison linéaire $L_1 + L_2$:

$$\begin{array}{l} L_1 \,:\, x + 2y - z = 8 \\ \underline{L_2 \,:\, -x + 3y + 4z = -7} \\ 2L_1 + L_2 \,:\, 5y + 3z = 1 \end{array}.$$

Le résultat devient la nouvelle L_2.

Pour éliminer x dans L_3, on utilise la combinaison linéaire $2L_1 - L_3$:

$$\begin{array}{l} 2L_1 \,:\, 2x + 4y - 2z = 16 \\ \underline{-L_3 \,:\, -2x + y - 2z = 6} \\ 2L_1 + L_2 \,:\, 5y - 4z = 22 \end{array}.$$

Le résultat devient la nouvelle L_3.

On obtient un nouveau système équivalent au premier :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 5y+3z=1 \\ 5y-4z=22 \end{array} \right.$$

• 2ème étape : On garde L_1 et L_2 et on élimine y dans L_3 en effectuant une combinaison linéaire avec L_2.
Pour éliminer y dans L_3, on utilise la combinaison linéaire L_2-L_3 :

$$\begin{array}{l} L_2 \,:\, 5y+3z=1 \\ \underline{-L_3 \,:\, -5y+4z=-22} \\ L_2-L_3 \,:\, 7z=-21 \end{array} .$$

Le résultat devient la nouvelle L_3.

On obtient un nouveau système équivalent au premier et dont la forme triangulaire permet une résolution rapide :

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 5y+3z=1 \\ 7z=-21 \end{array} \right.$$

La dernière ligne nous donne $z=-3$.
En remplaçant z par -3 dans la 2ème ligne, on obtient $5y-9=1$. On en déduit que $y=2$.
En remplaçant z par -3 et y par 2 dans la 1ère ligne, on obtient $x+4+3=8$. On en déduit que $x=1$.

► **Remarque :** il est préférable de rédiger de la façon suivante

$$\begin{array}{l} L_1 \\ L_2 \\ L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ -x+3y+4z=-7 \\ 2x-y+2z=-6 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_1+L_2 \\ 2L_1-L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 5y+3z=1 \\ 5y-4z=22 \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{r} L_1 \\ L_2 \\ L_2-L_3 \end{array} \left\{ \begin{array}{r} x+2y-z=8 \\ 5y+3z=1 \\ 7z=-21 \end{array} \right.$$

$S=\{(1,2,-3)\}$