Fonctions : Résumé de cours et méthodes

1 Généralités

Une fonction f définie sur D_f associe à chaque réel x de D_f un unique réel noté $f(x)$.
D_f est appelé l'**ensemble de définition** de f.
$f(x)$ est l'**image** de x par $f(x)$.
Tout réel x de D_f tel que $f(x) = y$ est dit **antécédent** de y par f.

• **Exemple :** Soit f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2$.
$f(2) = 2^2 = 4$. Donc 4 est l'image de 2 par f.

$$2 \xmapsto{f(x)} 4$$

(antécédent de 4) *(image de 2)*

On peut aussi dire que 2 est un antécédent de 4 par f.
Mais ce n'est pas le seul : on a aussi $f(-2) = (-2)^2 = 4$. Donc, -2 est aussi un antécédent de 4 par f.
Si un réel admet au plus une seule image par une fonction, il peut admettre plusieurs antécédents.

2 Comment déterminer l'ensemble de définition d'une fonction ?

Principe général :
Si l'expression de $f(x)$ admet un quotient, alors x appartient à l'ensemble de définition D_f si et seulement si le dénominateur est non nul.
Si l'expression de $f(x)$ admet une racine carrée, alors x appartient à l'ensemble de définition D_f si et seulement si l'expression sous la racine est positive.
(les deux cas peuvent se rencontrer en même temps)

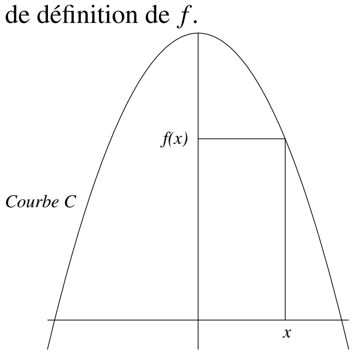
• **Exemples :**
1) $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$. Il y a un quotient : $x \in D_f \Leftrightarrow x+3 \neq 0 \Leftrightarrow x \neq -3$.
$D_f = \mathbb{R} - \{-3\}$.

2) $f(x) = \sqrt{x-4}$. Il y a une racine carrée : $x \in D_f \Leftrightarrow x-4 \geqslant 0 \Leftrightarrow x \geqslant 4$.
$D_f = [4; +\infty[$.

3) $f(x) = \dfrac{\sqrt{x}}{x-1}$. Il y a un quotient et une racine carrée :
$x \in D_f \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $x-1 \neq 0 \Leftrightarrow x \geqslant 0$ et $x \neq 1$.
$D_f = [0; 1[\cup]1; +\infty[$.

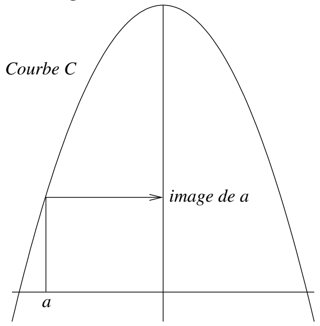
3 Courbe représentative

Dans un repère donné, la courbe C représentative de la fonction f est l'ensemble des points $M\begin{pmatrix} x \\ f(x) \end{pmatrix}$ où x décrit l'ensemble de définition de f.

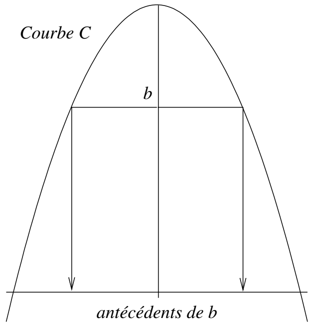


Une équation de la courbe est : $y = f(x)$.

• Recherche graphique de l'image d'un réel :
L'image d'un réel a est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse a.



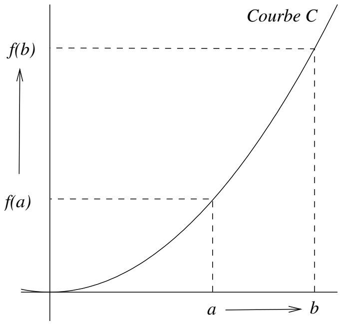
• Recherche graphique des antécédents d'un réel :
Les éventuels antécédents d'un réel b sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée b.



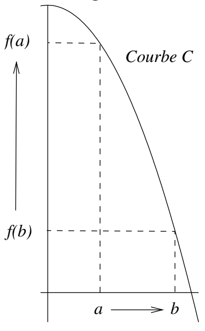
4 Fonction croissante ou décroissante sur un intervalle

Soit I un intervalle contenu dans l'ensemble de définition de la fonction f.

• f est dite **croissante** sur I si pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $f(a) \leqslant f(b)$.
(les images sont rangées dans le même ordre que les réels de départ)

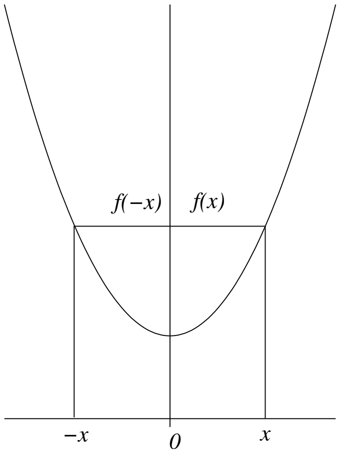


• f est dite **décroissante** sur I si pour tous réels a et b tels que $a < b$, on a $f(a) \geqslant f(b)$.
(les images sont rangées dans l'ordre contraire que les réels de départ)

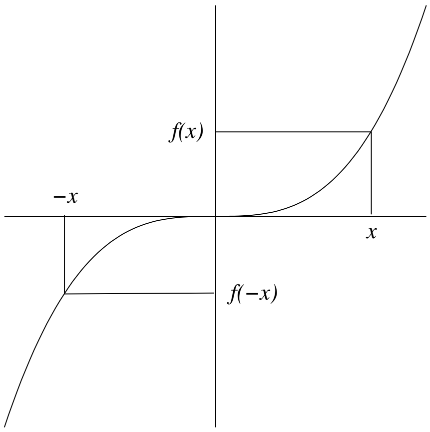


5 Fonction paire - Fonction impaire

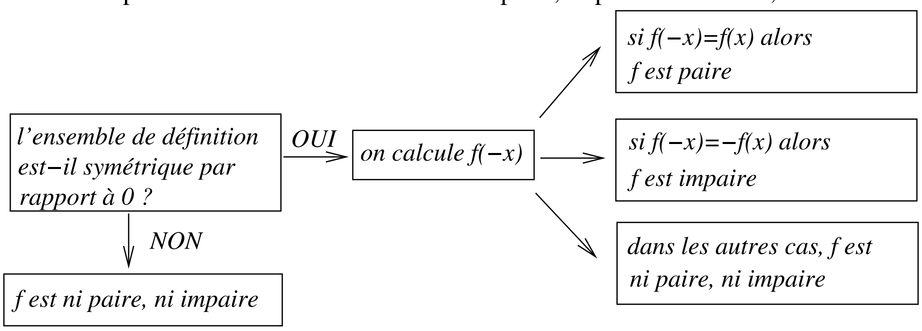
• f est dite **paire** si son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de D_f, $f(-x) = f(x)$.
La courbe représentative dans un repère orthogonal est alors symétrique par rapport à l'axe des ordonnées.



• f est dite **impaire** si son ensemble de définition D_f est symétrique par rapport à 0 et si, pour tout x de D_f, $f(-x) = -f(x)$.
La courbe représentative est alors symétrique par rapport à l'origine du repère.



• Méthode pour déterminer si une fonction est paire, impaire ou ni l'une, ni l'autre :



• **Exemples :**
1) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = 2x^2 + 1$ est paire car $\mathbb{R}$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de $\mathbb{R}$, $f(-x) = 2(-x)^2 + 1 = 2x^2 + 1 = f(x)$.

2) f définie sur $[0;+\infty[$ est ni paire, ni impaire car $[0;+\infty[$ n'est pas symétrique par rapport à 0.

3) f définie sur $\mathbb{R}^*$ par $f(x) = -\dfrac{2}{x}$ est impaire car $\mathbb{R}^*$ est symétrique par rapport à 0 et pour tout x de $\mathbb{R}^*$, $f(-x) = -\dfrac{2}{(-x)} = -\left(-\dfrac{2}{x}\right) = -f(x)$.

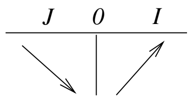
4) f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x+3$ est ni paire, ni impaire car si $\mathbb{R}$ est bien symétrique par rapport à 0, $f(-x) = -x+1$ est ni égal à $f(x)$, ni à $f(-x)$.

6 Conséquences de la parité d'une fonction sur ses variations

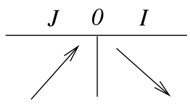
Soit f une fonction paire ou impaire, I un intervalle compris dans son ensemble de définition ne comprenant que des réels positifs et J l'intervalle symétrique de I par rapport à 0.
En connaissant le sens de variation de I, on peut en déduire celui sur J grâce aux propriétés suivantes :

• Si f est paire :

Si f est croissante sur I, alors f est décroissante sur J

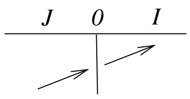


Si f est décroissante sur I, alors f est croissante sur J

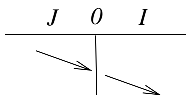


• Si f est impaire :

Si f est croissante sur I, alors f est croissante sur J



Si f est décroissante sur I, alors f est décroissante sur J



7 Résolution graphique d'équations et d'inéquations grâce à la courbe d'une fonction

Principe général :
Soit f une fonction, I un intervalle compris dans son ensemble de définition, C sa courbe représentative et D la droite d'équation $y = b$.

- Les solutions sur I de l'équation $f(x) = b$ sont les abscisses des points d'intersection entre la courbe C et la droite D.
- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) > b$ sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement au dessus de la droite D. *(pour $f(x) \geqslant b$, il suffit de rajouter les abscisses des points d'intersection)*
- Les solutions sur I de l'inéquation $f(x) < b$ sont les abscisses des points de la courbe C situés strictement en dessous de la droite D. *(pour $f(x) \leqslant b$, il suffit de rajouter les abscisses des points d'intersection)*

• **Exemple :** soit f la fonction dont la courbe est donnée ci-dessous.
Graphiquement, on peut dire que les solutions dans l'intervalle $[-4;4]$ de l'équation $f(x) = 2$ sont -3 et 2.
De même, on peut dire que les solutions de l'inéquation $f(x) \leqslant 2$, sont les réels compris entre -3 et 2.