Points et vecteurs dans un repère : exercices

Les réponses (non détaillées) aux questions sont disponibles à la fin du document

Pour tous les exercices, le plan est muni d'un repère orthonormé.

Exercice 1 :

Soit $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}$ et $\overrightarrow{w}\begin{pmatrix} \frac{1}{2} \\ -\frac{3}{4} \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs suivants :

$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$; $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}$; $\frac{1}{2}\overrightarrow{u}+\overrightarrow{w}$; $3\overrightarrow{u}-2\overrightarrow{v}$

Exercice 2 :

Déterminer si les vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont colinéaires dans les cas suivants :

1) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 8 \\ -4 \end{pmatrix}$

2) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -\frac{2}{3} \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ -2 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} -3 \\ 3\sqrt{2} \end{pmatrix}$

4) $\overrightarrow{u}\begin{pmatrix} \sqrt{3}-2 \\ 1 \end{pmatrix}$; $\overrightarrow{v}\begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3}+2 \end{pmatrix}$

Exercice 3 :

On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} -3 \\ 0 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -6 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées des vecteurs : $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, $3\overrightarrow{BC}$, $-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}$, $2\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Exercice 4 :

On considère les points $A\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point D tel que $ABCD$ soit un parallélogramme.

Exercice 5 :

On considère les points $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 1 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 4 \\ -5 \end{pmatrix}$.

Déterminer les coordonnées du point M dans les cas suivants :

1) M est tel que $\overrightarrow{BM}=\overrightarrow{AB}$.
2) M est le milieu de $[AC]$.
3) $2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{CM}=\overrightarrow{0}$.
4) $ABCM$ est un parallélogramme.

Exercice 6 :

Déterminer si les points A, B et C sont alignés ou non dans les cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 15 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $A\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} -\frac{5}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

3) $A\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ 1 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} \frac{17}{2} \\ -5 \end{pmatrix}$

Exercice 7 :

On considère les points $A\begin{pmatrix} 0 \\ -3 \end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$, $C\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$ et $D\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

1) Calculer les coordonnées des points E et F tels que $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AF} = 3\overrightarrow{AD}$

2) Montrer que les points C, E et F sont alignés.

Exercice 8 :

Calculer la distance AB dans les cas suivants :

1) $A\begin{pmatrix} -2 \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 2 \\ 6 \end{pmatrix}$

2) $A\begin{pmatrix} \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} 3\sqrt{2} \\ 4 \end{pmatrix}$

3) $A\begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$; $B\begin{pmatrix} -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ 3 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 1 :

$\vec{u}+\vec{v}\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix}$; $\vec{u}-\vec{v}\begin{pmatrix} -6 \\ 0 \end{pmatrix}$; $\vec{u}+\vec{v}+\vec{w}\begin{pmatrix} \frac{5}{2} \\ \frac{5}{4} \end{pmatrix}$; $\frac{1}{2}\vec{u}+\vec{w}\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ -\frac{1}{4} \end{pmatrix}$; $3\vec{u}-2\vec{v}\begin{pmatrix} -14 \\ 1 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 2 :

1) colinéaires car $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$
2) colinéaires car $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$
3) colinéaires car $\det(\vec{u},\vec{v}) = 0$
4) non colinéaires car $\det(\vec{u},\vec{v}) = -2$

Réponses exercice 3 :

$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} -1 \\ -1 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC}\begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix}$, $3\overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} 12 \\ 12 \end{pmatrix}$, $-2\overrightarrow{BC}+3\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} -20 \\ 4 \end{pmatrix}$, $2\overrightarrow{DB}-\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \frac{13}{2} \\ -\frac{19}{2} \end{pmatrix}$

Réponses exercice 4 :

On cherche $D\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ (ou toute autre égalité de vecteurs possible). Après calcul, on obtient $D\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 5 :

1) $\overrightarrow{BM}\begin{pmatrix} x-\cdots \\ y-\cdots \end{pmatrix} = \overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ ... On obtient $M\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$

2) $M\begin{pmatrix} x_M = \dfrac{x_A+x_C}{2} \\ y_M = \dfrac{y_A+y_C}{2} \end{pmatrix}$ ... On obtient $M\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

3) $2\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} + 3\overrightarrow{CM}\begin{pmatrix} 3(x-\cdots) \\ 3(y-\cdots) \end{pmatrix} = \vec{0}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$... On obtient $M\begin{pmatrix} 2 \\ -\frac{17}{3} \end{pmatrix}$

4) On cherche $M\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ tel que $\overrightarrow{AM}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix} = \overrightarrow{BC}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ (ou toute autre égalité de vecteurs possible).

Après calcul, on obtient $M\begin{pmatrix} 1 \\ -6 \end{pmatrix}$

Réponses exercice 6 :

1) $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$. Les points A, B et C sont alignés.
2) $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 6$. Les points A, B et C ne sont pas alignés.
3) $\det\left(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC}\right) = 0$. Les points A, B et C sont alignés.

Réponses exercice 7 :

1) $\overrightarrow{BE}\begin{pmatrix} x - \cdots \\ y - \cdots \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$... On obtient $E\begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}$
$\overrightarrow{AF}\begin{pmatrix} x - \cdots \\ y - \cdots \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{AD}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$... On obtient $F\begin{pmatrix} -3 \\ 3 \end{pmatrix}$
2) $\det\left(\overrightarrow{CE}, \overrightarrow{CF}\right) = 0$. Les points C, E et F sont alignés.

Réponses exercice 8 :

1) $AB = 5$
2) $AB = \sqrt{17}$
3) $AB = \sqrt{2}$