Équations de droite : Résumé de cours et méthodes

Le plan est muni d'un repère orthonormé

1 Rappels sur les équations de droite

Pour les droites non parallèles à l'axe des ordonnées :
• Elles admettent une équation de la forme $y = mx + p$.
m est le **coefficient directeur** et p est l'ordonnée à l'origine.
• Dire qu'un point $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ appartient à la droite d'équation $y = mx + p$ signifie que ses coordonnées vérifient l'équation, c'est à dire que $y_A = mx_A + p$.
• Etant donné les droites D d'équation $y = mx + p$ et D' d'équation $y = m'x + p'$:
D est parallèle à D' si et seulement si $m = m'$.
D est orthogonale à D' si et seulement si $m \times m' = -1$.

Pour les droites parallèles à l'axe des ordonnées :
Elles admettent une équation de la forme $x = c$.

2 Comment déterminer une équation d'une droite connaissant deux de ses points ?

Méthode générale : équation de la droite D passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} x_B \\ y_B \end{pmatrix}$.
• si A et B ont la même abscisse alors D est parallèle à l'axe des ordonnées et admet $x = x_A$ comme équation.

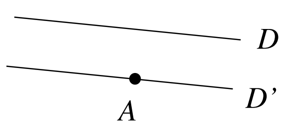
• Dans le cas contraire, on calcule d'abord le coefficient directeur m avec la formule suivante :
$m = \dfrac{y_B - y_A}{x_B - x_A} = \dfrac{\text{différence des ordonnées}}{\text{différence des abscisses}}$.
Pour déterminer p, on exprime que les coordonnées de A doivent vérifier l'équation, c'est à dire que $y_A = mx_A + p$.

Exemple : Déterminons une équation de la droite D passant par $A\begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$ et $B\begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$.

On a $m = \dfrac{-1-(-2)}{4-2} = \dfrac{1}{2}$. De plus, $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow -2 = \dfrac{1}{2} \times 2 + p \Leftrightarrow p = -3$. Une équation de D est $y = \dfrac{1}{2}x - 3$.

3 Comment déterminer une équation de la droite parallèle à une droite connue et passant par un point connu ?

Méthode générale : équation de la droite D' parallèle à la droite D et passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$.



• Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées :
D admet une équation de la forme $y = mx + p$ et D' une équation de la forme $y = m'x + p'$ avec $m' = m$. Pour déterminer p', on exprime que les coordonnées de A doivent vérifier l'équation de D', c'est à dire que $y_A = m'x_A + p'$.

• Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
D' est aussi parallèle à l'axe des ordonnées et comme elle passe par A, son équation est $x = x_A$.

Exemple 1 : Déterminons une équation de la droite D' parallèle à la droite D d'équation $y = 3x - 4$ et passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

On a $m' = m = 3$ et $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow 2 = 3 \times 1 + p' \Leftrightarrow p' = -1$.
Une équation de D' est donc $y = 3x - 1$.

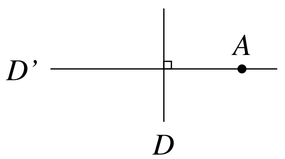
Exemple 2 : On considère les points $B\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation de la droite D' parallèle à la droite (BC) et passant par $A\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Le coefficient directeur de D' est le même que celui de (BC). Donc, $m' = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{8-2}{3-0} = 2$.
Et, $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow -1 = 2 \times 1 + p' \Leftrightarrow p' = -3$.
Une équation de D' est donc $y = 2x - 3$.

4 Comment déterminer une équation de la droite orthogonale à une droite connue et passant par un point connu ?

Méthode générale : équation de la droite D' orthogonale à la droite D et passant par $A\begin{pmatrix} x_A \\ y_A \end{pmatrix}$ dans un repère orthonormal.



• Si D n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées ou à l'axe des abscisses :
D admet une équation de la forme $y = mx + p$ et D' une équation de la forme $y = m'x + p'$ avec $m' = -\dfrac{1}{m}$. Pour déterminer p', on exprime que les coordonnées de A doivent vérifier l'équation de D', c'est à dire que $y_A = m'x_A + p'$.

• Si D est parallèle à l'axe des abscisses :
D' est alors parallèle à l'axe des ordonnées et comme elle passe par A, son équation est $x = x_A$.

• Si D est parallèle à l'axe des ordonnées :
D' est alors parallèle à l'axe des abscisses et comme elle passe par A, son équation est $y = y_A$.

Exemple 1 : Déterminons une équation de la droite D' orthogonale à la droite D d'équation $y = 2x + 4$ et passant par $A\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

On a $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{2}$ et $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow 5 = -\dfrac{1}{2} \times 4 + p' \Leftrightarrow p' = 7$.
Une équation de D' est donc $y = -\dfrac{1}{2}x + 7$.

Exemple 2 : On considère les points $B\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Déterminons une équation de la droite D' orthogonale à la droite (BC) et passant par $A\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Le coefficient directeur de (BC) est $m = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{1-4}{1-0} = -3$.
Le coefficient directeur de D' est donc $m' = -\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{3}$.
Et, $y_A = m'x_A + p' \Leftrightarrow 2 = \dfrac{1}{3} \times (-3) + p' \Leftrightarrow p' = 3$.
Une équation de D' est donc $y = \dfrac{1}{3}x + 3$.

5 Exemple de recherche d'une équation d'une médiane, d'une médiatrice et d'une hauteur

Dans un repère orthonormé, on considère les points $A\begin{pmatrix}-3\\1\end{pmatrix}$, $B\begin{pmatrix}1\\3\end{pmatrix}$ et $C\begin{pmatrix}-1\\-5\end{pmatrix}$.

• Déterminons une équation de la médiane issue de A dans le triangle ABC.
Elle passe par A et par I, le milieu de $[BC]$.

Or, $x_I = \dfrac{x_B + x_C}{2} = 0$ et $y_I = \dfrac{y_B + y_C}{2} = -1$. Donc, $I\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$.

Le coefficient directeur de la médiane est $m = \dfrac{y_I - y_A}{x_I - x_A} = \dfrac{-1-1}{0-(-3)} = -\dfrac{2}{3}$.

Et, $y_A = mx_A + p \Leftrightarrow 1 = -\dfrac{2}{3} \times (-3) + p \Leftrightarrow p = -1$.

Une équation de la médiane est donc $y = -\dfrac{2}{3}x - 1$.

• Déterminons une équation de la médiatrice de $[BC]$.

C'est la droite passant par $I\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}$, le milieu de $[BC]$ et orthogonale à $[BC]$.

Le coefficient directeur de (BC) est $m = \dfrac{y_C - y_B}{x_C - x_B} = \dfrac{-5-3}{-1-1} = 4$.

Le coefficient directeur de la médiatrice est donc $m' = -\dfrac{1}{m} = -\dfrac{1}{4}$.

Et, $y_I = m'x_I + p' \Leftrightarrow -1 = -\dfrac{1}{4} \times 0 + p' \Leftrightarrow p' = -1$.

Une équation de la médiatrice est donc $y = -\dfrac{1}{4}x - 1$.

• Déterminons une équation de la hauteur issue de B dans le triangle ABC.
C'est la droite passant par B et orthogonale à (AC).

Le coefficient directeur de (AC) est $m = \dfrac{y_C - y_A}{x_C - x_A} = \dfrac{-5-1}{-1-(-3)} = -3$.

Le coefficient directeur de la hauteur est donc $m' = -\dfrac{1}{m} = \dfrac{1}{3}$.

Et, $y_B = m'x_B + p' \Leftrightarrow 3 = \dfrac{1}{3} \times 1 + p' \Leftrightarrow p' = \dfrac{8}{3}$.

Une équation de la hauteur est donc $y = \dfrac{1}{3}x + \dfrac{8}{3}$.